



Algèbre homologique dans la catégorie des modules instables.

The Cuong Nguyen

► To cite this version:

The Cuong Nguyen. Algèbre homologique dans la catégorie des modules instables.. Topologie algébrique [math.AT]. Université Paris-Nord - Paris XIII, 2014. Français. NNT : 2014PA132007 . tel-01236192

HAL Id: tel-01236192

<https://theses.hal.science/tel-01236192>

Submitted on 1 Dec 2015

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

N° attribué par la bibliothèque

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

THÈSE

Pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ PARIS 13

Discipline : **Mathématiques**

Présentée et soutenue publiquement par :

NGUYEN The Cuong

Le 2 juillet 2014

Algèbre homologique dans la catégorie des modules instables

Directeur de thèse :

Lionel SCHWARTZ

Composition du jury :

M. Vincent FRANJOU,	professeur	(Université de Nantes)	rapporteur.
M. Paul GOERSS,	professeur	(Northwestern University)	
M. Bob OLIVER,	professeur	(Université Paris 13)	président.
M. Jérôme SCHERER,	professeur	(EPFL)	rapporteur.
M. Saïd ZARATI,	professeur	(Université de Tunis)	

Remerciements

Au terme de ce travail, c'est avec émotion que je tiens à remercier tous ceux qui, de près ou de loin, ont contribué à la réalisation de ce projet.

Je tiens tout d'abord à adresser mes remerciements les plus sincères à mon directeur, Monsieur Lionel Schwartz, pour m'avoir fait confiance malgré les connaissances plutôt légères que j'avais en 2010 sur la topologie algébrique, puis pour m'avoir guidé, encouragé, conseillé, fait beaucoup voyager pendant presque quatre ans tout en me laissant une grande liberté et en me faisant bénéficier de ses grandes connaissances dans plusieurs domaines, notamment les modules instables et les catégories de foncteurs. J'aimerais également lui dire à quel point j'ai apprécié sa grande disponibilité malgré ses nombreuses charges. J'espère avoir été digne de la confiance qu'il m'avait accordée et que ce travail est finalement à la hauteur de ses espérances. Enfin, j'ai été extrêmement sensible à ses qualités humaines d'écoute et de compréhension tout au long de ce travail.

Je souhaiterais exprimer ma gratitude à Messieurs Vincent Franjou et Jérôme Scherer pour m'avoir fait l'honneur d'être rapporteurs de cette thèse, puis pour le temps qu'ils ont pris de m'écouter et de discuter avec moi. Leurs remarques m'ont permis d'envisager mon travail sous un autre angle.

Mes remerciements vont également à Monsieur Paul Goerss et Saïd Zarati pour avoir accepté de participer à ce jury de thèse. Je suis particulièrement reconnaissant à Monsieur Bob Oliver pour m'avoir fait l'honneur d'être le président du jury.

Le plaisir que j'ai pu avoir à faire des mathématiques n'aurait pas été le même sans nombreux échanges passionnants avec Gérard Gaudens, Le Minh Ha, Nguyen Dang Ho Hai et Pham Van Tuan tout au long de ma thèse.

Je suis très reconnaissant à l'équipe de topologie algébrique qui m'ont accueilli. J'ai grandement apprécié la qualité de l'environnement scientifique qu'ils m'ont fourni. Je sais gré à Muriel Livernet, Geoffrey Powell et Antoine Touzé pour avoir organisé des nombreux groupes de travail ainsi que des autres activités de l'équipe. Je tiens aussi à mentionner le plaisir que j'ai eu à travailler au sein du LAGA et du VIASM, et j'en remercie ici tous les membres.

En ce qui concerne la partie informatique de ce travail, je remercie Monsieur Gilles Scarella, du LAGA, pour le temps qu'il a pris pour m'avoir aidé à faciliter l'accès au serveur de calcul gaia afin d'utiliser le logiciel Maple.

Il m'est impossible d'oublier Monsieur Frederic Weissler et Jean-Stephane Dhersin pour leur précieux soutien durant ma mission de l'enseignement à l'université Paris 13. Merci de votre confiance et de m'avoir permis de faire mes premières expériences d'enseignant à l'université.

Je ne suis jamais si reconnaissant à la ville de Paris. C'était à cause de toute la difficulté qu'elle m'a causé en cherchant désespérément un abri que j'ai eu l'occasion de faire une collocation intéressante avec mes bientôt ex-colocataires Tran Ngoc Khue et Tran Quang Vu. Je tiens en particulier à remercier sincèrement mes propriétaires, Madame et Monsieur Nguyen.

Je passe ensuite une dédicace spéciale à tous les jeunes gens avec qui j'ai eu le plaisir de partager une salle, un repas, un café, une bière, un sport, un voyage, un jeux vidéo ou une soirée d'amis durant ces quelques années à Paris, à savoir Ariane, Giovanni, Giuseppe, Irene, Javier, Julien, Linglong, Mostafa, Nicolas-Marie, Rémy, Roland-Cécile, Thomas-Cécile...

Ces remerciements seraient incomplets sans mentionner la présence, tout au long de mes études en France, de mes amis vietnamiens : anh chi Loc-Phuong, Diep, Hoa, Hoan, Hoan-Nga, Hung, Kien, Nam, Nga beo, Nghia, Ngoc Anh, Nguyen-Nga, Phong, Quang, Quyet, Trung, hai Tuan, Viet...

Mes longues années à l'étranger n'auraient pas été si joyeuses sans mes chers amis Hung-Yen. Je suis reconnaissant que nos chemins se sont croisés.

Enfin, les mots les plus simples étant les plus forts, j'adresse toute mon affection à mes parents, ma grand-mère, mes deux tantes, mon frère et ma sœur. Je sais que mon absence a été longue et j'espère pouvoir un jour rattraper le retard accumulé.

Table des matières

Introduction	9
1 Modules instables	17
1.1 L'algèbre de Steenrod et modules instables	17
1.1.1 Les opérations cohomologiques	17
1.1.2 La condition d'instabilité et les objets instables	19
1.1.2.1 Modules instables	19
1.1.2.2 Algèbres instables	19
1.1.3 La base de Cartan-Serre	20
1.1.4 Les objets projectifs et injectifs de la catégorie \mathcal{U}	20
1.1.4.1 Les projectifs	20
1.1.4.2 La torsion de Frobenius dans la catégorie \mathcal{U}	22
1.1.4.3 Le foncteur de Lannes et les modules instables injectifs	27
1.2 Catégories de foncteurs	36
1.2.1 Foncteur de Lannes et la catégorie de foncteurs	36
1.2.2 Catégories quotient par rapport à une sous-catégorie épaisse	37
1.2.2.1 Remarques et Propriétés	38
1.2.2.2 Le noyau du foncteur f'	39
1.2.2.3 Sous-catégories localisantes	39
1.3 La filtration de Krull de la catégorie \mathcal{U}	40
1.3.1 La filtration de Krull	41
1.3.1.1 La dimension de Krull d'une catégorie abélienne	41
1.3.1.2 La filtration de Krull de la catégorie \mathcal{U}	41
1.3.2 Le cas de \mathcal{U}	42
1.4 La filtration nilpotente	46
1.5 Pseudo-hyper résolutions	48
2 Foncteurs polynomiaux stricts et modules instables	53
2.1 Foncteurs polynomiaux à la Frielander-Suslin	53
2.1.1 Foncteurs polynomiaux	54
2.1.1.1 Foncteurs polynomiaux à la Friedlander-Suslin	54
2.1.2 Opérations binaires de foncteurs polynomiaux stricts	56
2.2 Le foncteur de Hai	58

2.2.1	Théorèmes principaux	59
2.3	Démonstration des théorèmes principaux	60
2.3.1	Mod-nil générateurs	62
2.3.2	Un lemme combinatoire	63
2.3.3	L'action des opérations de Steenrod	65
2.3.4	La preuve du lemme 2.3.0.7	67
3	Sur la résolution injective minimale de $\Sigma^d J(n)$	69
3.1	Une résolution injective de $\Sigma^d J(n)$	69
3.1.1	L'algorithme BG	73
3.1.1.1	Résolutions injectives minimales	75
3.1.1.2	Les premiers exemples	76
3.1.1.3	La technologie de Maple	80
3.2	La résolution injective minimale de $\Sigma^n \mathbb{F}_2$	86
3.2.1	La suite de l'homomorphisme de Bockstein	86
3.2.2	Estimation de la fonction τ	95
4	Torsions de Frobenius dans la catégorie \mathcal{U}	109
4.1	La réduction du problème et un contre-exemple	110
4.2	Une application des pseudo-hyper résolutions	113
4.3	Sur la résolution injective minimale de $F(1)$	117
4.3.1	L'homologie du complexe $(R^\bullet, \partial_r^\bullet)$	118
4.3.2	La partie réduite de la résolution	120
4.3.2.1	A propos d'un résultat de A. Touzé et un lemme de connectivité	120
4.3.3	La partie nilpotente de la résolution	124
4.3.3.1	L'algèbre homologique élémentaire	124
4.3.3.2	Les résultats	130
4.4	Les preuves des résultats principaux	132
4.4.1	La périodicité de la résolution injective minimale de $F(1)$	132
4.4.2	Le cas de $N^{2^k+3}, k \geq 2$	135
4.4.2.1	Première approche	135
4.4.2.2	Deuxième approche	136
4.4.3	Le cas de $N^{2^k+5}, k \geq 3$	138
A	Quelques calculs dans la catégorie \mathcal{U}	143
A.1	Sur la conjecture 4.3.3.1	143
A.2	La vérification des lemmes techniques	144
A.3	L'estimation de la fonction τ	149
A.3.1	Quelques valeurs de la fonction τ	150
A.3.2	Démonstration du théorème 3.2.2.2	162
B	La procédure de Maple	177

Bibliographie	197
Index	199
Index des notations	201
Algèbres et corps	201
Catégories et objets	201
Foncteurs et transformations	201
Modules et éléments	202
Morphismes et différentielles	203
Opérateurs et opérations	203

Introduction

La lettre p désigne un nombre premier. On note \mathbb{F}_p le corps fini de cardinal p . Dans cette thèse, nous nous limiterons au cas $p = 2$. Désignons par $\mathcal{T}op$ la catégorie des espaces topologiques et par $\mathcal{V}_{\mathbb{F}_2}$ la catégorie des \mathbb{F}_2 -espaces vectoriels. Soit X un objet de la catégorie $\mathcal{T}op$, on note $H^*(X; \mathbb{F}_2) := \bigoplus_{n \geq 0} H^n(X; \mathbb{F}_2)$ la cohomologie singulière de X avec coefficient \mathbb{F}_2 . On utilisera souvent les notations H^*X, H^nX et \mathcal{V} sans préciser le corps de base \mathbb{F}_2 . L'action de \mathbb{F}_2 fait de H^nX un \mathbb{F}_2 -espace vectoriel. Puisque H^*X est la somme directe de H^nX pour tout $n \geq 0$, elle est muni d'une graduation sur \mathbb{F}_2 . Le degré d'un élément homogène $x \in H^*X$ sera noté $|x|$. Plus exactement, si $x \in H^nX$, alors $|x| = n$. La diagonale $\Delta : X \rightarrow X \times X, x \mapsto (x, x)$ induit l'application $\Delta^* : H^*X \otimes H^*X \rightarrow H^*X$. D'après [Spa66, V.6], (H^*X, Δ^*) est une algèbre graduée commutative. L'application qui, à un espace topologique X associe sa cohomologie singulière H^nX est en fait un foncteur de $\mathcal{T}op$ vers \mathcal{V} . Ce foncteur est représentable par l'espace d'Eilenberg Mac Lane $K(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, n)$ [Spa66, VIII.1]. C'est à dire qu'on a une équivalence

$$[X, K(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, n)] \cong H^nX$$

naturelle en X . Cela a la conséquence suivante : les applications continues entre les espaces d'Eilenberg Mac Lane induisent les transformations naturelles entre les foncteurs $H^n(-; \mathbb{F}_2)$. Selon [Ste62, chapitre I, §1], l'ensemble de toutes ces transformations forme une algèbre. Cette algèbre, nommée d'après Steenrod et notée \mathcal{A}_2 , agit de façon fonctorielle sur la cohomologie singulière H^*X . Cela fait de H^*X un module sur l'algèbre de Steenrod soumi à une condition particulière que l'on appelle *instabilité*. Précisons la : l'algèbre de Steenrod \mathcal{A}_2 peut être définie par générateurs et relations ; on note $\{Sq^i : |Sq^i| = i, i \in \mathbb{N}\}$ le système de générateurs de \mathcal{A}_2 soumi aux relations d'Adem (voir Adem-2, voir aussi [Ste62, chapitre I, §1]) ; un module M sur l'algèbre de Steenrod est dit *instable* si pour tout élément homogène $x \in M$, $Sq^i(x) = 0$ dès que $i > |x|$. On note \mathcal{M} la catégorie des modules sur l'algèbre de Steenrod et \mathcal{U} la sous-catégorie pleine formée des objets instables. La catégorie \mathcal{M} est abélienne et \mathcal{U} l'est aussi. On peut associer à \mathcal{U} une filtration de Krull

$$\mathcal{U}_0 \subset \mathcal{U}_1 \subset \dots \subset \mathcal{U}_n \subset \dots \subset \mathcal{U}.$$

On note $B(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ l'espace classifiant du groupe $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. C'est à dire de la forme $K(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, 1)$. Le foncteur $- \otimes \tilde{H}^*B(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{U}$ admet un adjoint à gauche \bar{T} . On a alors :

Théorème 1.3.2.11. ([Sch94, théorème 6.2.4], voir aussi [Kuh13, théorème 1.1]). *Un module instable M appartient à \mathcal{U}_n si et seulement si $\bar{T}^{n+1}M = 0$.*

Dans le premier chapitre de la thèse, on donne une nouvelle preuve de ce théorème. Cette démonstration est plus élémentaire que celle introduite dans [Sch94]. Elle est analogue à la preuve donnée récemment par Kuhn dans [Kuh13] mais contrairement à celle-ci, la nôtre reste dans \mathcal{U} .

On désigne par \mathcal{V}^f la sous-catégorie pleine de \mathcal{V} , formée des \mathbb{F}_2 —espaces vectoriels de dimension finie. Notons \mathcal{F} la catégorie des foncteurs de \mathcal{V}^f vers \mathcal{V} . Soient M un module instable et V un 2—groupe abélien élémentaire. C’est à dire de la forme $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{\oplus d}$. On note BV l’espace classifiant de V . Le foncteur de Lannes T_V est l’adjoint à gauche du foncteur $- \otimes H^*BV : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{U}$. L’application, qui à V associe l’espace $T_V(M)^0$, est un objet de la catégorie \mathcal{F} . Le passage du module M vers un tel objet est un foncteur de \mathcal{U} dans \mathcal{F} et on le note f . La donnée d’un foncteur $F \in \mathcal{F}$ est équivalente à celle d’une application $F : \mathcal{V}^f \rightarrow \mathcal{V}$ accompagnée des morphismes structuraux

$$\text{mor}(F)_{V,W} : \text{Hom}_{\mathcal{V}^f}(V, W) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{V}}(F(V), F(W))$$

soumis à certaines conditions provenant des propriétés du foncteur F [ML98, I.1]. Le groupe symétrique \mathfrak{S}_d agit par permutation sur $V^{\otimes d}$. On note $\Gamma^d(V) = (V^{\otimes d})^{\mathfrak{S}_d}$. En remplaçant le but \mathcal{V} de F par \mathcal{V}^f et les morphismes structuraux $\text{mor}(F)_{V,W}$ par :

$$\Gamma^d(\text{Hom}_{\mathcal{V}^f}(V, W)) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{V}^f}(F(V), F(W)), \quad (P_d)$$

on obtient la définition d’un foncteur polynomial strict de degré d . On désigne par \mathcal{P}_d la catégorie des foncteurs polynomiaux stricts de degré d et par $\mathcal{P} = \bigoplus_{d \geq 0} \mathcal{P}_d$ celle des foncteurs polynomiaux stricts. On note $\gamma_d(U) : U \rightarrow \Gamma^d(U)$ l’application qui associe à $x \in U$ l’élément $x^{\otimes d} \in \Gamma^d(U)$. Le composé

$$\text{Hom}_{\mathcal{V}^f}(V, W) \xrightarrow{\gamma_d(\text{Hom}_{\mathcal{V}^f}(V, W))} \Gamma^d(\text{Hom}_{\mathcal{V}^f}(V, W)) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{V}^f}(F(V), F(W))$$

fait d’un foncteur polynomial strict F un objet de la catégorie \mathcal{F} . Ce passage de $\mathcal{P}_d \rightarrow \mathcal{F}$ est appelé foncteur d’oubli et est noté \mathcal{O} . Le diagramme suivant résume la situation entre les trois catégories \mathcal{U}, \mathcal{P} et \mathcal{F}

$$\begin{array}{ccc} & \mathcal{P} & \\ & \downarrow \mathcal{O} & \\ \mathcal{U} & \xrightarrow{f} & \mathcal{F} \end{array} \quad (\mathcal{U} - \mathcal{P}\mathcal{F})$$

La catégorie \mathcal{U} possède des générateurs projectifs $F(n)$ qui sont monogènes engendrés par les éléments ι_n de degré n . Les modules $F(n)$ peuvent être exprimés en fonction de $F(1)$ grâce aux foncteurs Γ^n . En effet $F(n) \cong \Gamma^n(F(1))$. Par ailleurs, en prenant l’évaluation sur $F(n)$ du foncteur f on retombe sur les foncteurs Γ^n . En particulier $f(F(1)) = I$, I notant le foncteur inclusion $V \mapsto V$. Suivant [Hai10], l’association qui à un foncteur polynomial strict G associe l’évaluation $G(F(1))$ est un foncteur de \mathcal{P} vers \mathcal{U} . On la note \bar{m} . Le foncteur d’oubli $\mathcal{P} \xrightarrow{\mathcal{O}} \mathcal{F}$ peut se factoriser à travers \mathcal{U} grâce à \bar{m}

$$\begin{array}{ccc} & \mathcal{P} & \\ \bar{m} \swarrow & \downarrow \mathcal{O} & \\ \mathcal{U} & \xrightarrow{f} & \mathcal{F} \end{array} \quad (\mathcal{U}\mathcal{P}\mathcal{F})$$

Le foncteur \bar{m} possède de bonnes propriétés. Il est exact et commute avec les produits tensoriels. Notons $\bar{m}_d : \mathcal{P}_d \rightarrow \mathcal{U}$ la restriction de \bar{m} sur \mathcal{P}_d . On montrera que le foncteur \bar{m}_d admet un adjoint à gauche l ainsi qu'un adjoint à droite r tels que les foncteurs $l \circ \bar{m}$ et $r \circ \bar{m}$ sont équivalents au foncteur identité. Cela implique le théorème suivant qui est le contenu du chapitre 2.

Théorème 2.2.1.1. *Le foncteur \bar{m}_d est pleinement fidèle.*

On note f_2 le morphisme de Frobenius : $\mathbb{F}_2 \rightarrow \mathbb{F}_2, \lambda \rightarrow \lambda^2$. L'application qui, à un espace $V \in \mathcal{V}$ associe l'espace $V \otimes_{f_2} \mathbb{F}_2$, muni de l'application structurale

$$\Gamma^2(\mathrm{Hom}_{\mathcal{V}f}(V, W)) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{V}f}(V^{(1)}, W^{(1)})$$

induite par le Verschiebung $\Gamma^2(\mathrm{Hom}_{\mathcal{V}f}(V, W)) \rightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{V}f}(V, W)$, définit le foncteur polynomial strict $I^{(1)}$ de degré 2. Les foncteurs $I^{(r)} \in \mathcal{P}_{2^r}$ sont obtenus récursivement : $I^{(r)} = (I^{(r-1)})^{(1)}$. Les torsions de Frobenius dans la catégorie \mathcal{P} sont définies comme les foncteurs de précomposition avec les foncteurs $I^{(r)}$:

$$\begin{aligned} (-)^{(r)} : \mathcal{P}_d &\rightarrow \mathcal{P}_{2^r d} \\ F &\mapsto F \circ I^{(r)}. \end{aligned}$$

Bien que le corps de base soit \mathbb{F}_2 et donc que le morphisme de Frobenius f_2 soit l'identité, les torsions de Frobenius sont distinctes dans \mathcal{P} à cause de la structure polynomiale. Plus exactement, malgré que $\lambda = \lambda^2$ pour tout $\lambda \in \mathbb{F}_2$, le polynôme $x \mapsto x^2$ n'est pas identique au polynôme identité $x \mapsto x$. Au contraire, la catégorie \mathcal{F} ne peut pas distinguer les torsions de Frobenius puisqu'on y a oublié la structure polynomiale (voir 2.1.2.1). On note Φ l'endofoncteur de \mathcal{U} qui associe à un module instable M le module ΦM concentré en degrés pairs et $(\Phi(M))^{2n} = M^n$ pour tout $n \geq 0$. C'est une variété de Frobenius dans la catégorie \mathcal{U} . Le foncteur de Hai préserve les torsions de Frobenius. On a alors

$$\begin{array}{ccc} & & G^{(r)} \\ & \nearrow \bar{m} & \downarrow \vartheta \\ \Phi^r(G(F(1))) & \xrightarrow{f} & G \end{array}$$

Soient F et G deux foncteurs polynomiaux stricts. Les groupes d'extensions $\mathrm{Ext}_{\mathcal{P}}^*(F^{(r)}, G^{(r)})$ sont liés par la suite des injections [FFSS99, corollaire 1.3] :

$$\cdots \rightarrow \mathrm{Ext}_{\mathcal{P}}^*(F^{(r)}, G^{(r)}) \xrightarrow{\mathrm{Ext}^*((-)^{(1)}, (-)^{(1)})} \mathrm{Ext}_{\mathcal{P}}^*(F^{(r+1)}, G^{(r+1)}) \rightarrow \cdots \quad (\mathrm{Frob})$$

Le foncteur d'oubli $\mathcal{P} \xrightarrow{\vartheta} \mathcal{F}$ induit les inclusions $\mathrm{Ext}_{\mathcal{P}}^*(F^{(r)}, G^{(r)}) \hookrightarrow \mathrm{Ext}_{\mathcal{F}}^*(F, G)$ d'après [FFSS99, proposition 2.5]. Ces applications se factorisent à travers les groupes $\mathrm{Ext}_{\mathcal{U}}^*(\bar{m}(F^{(r)}), \bar{m}(G^{(r)}))$ donc les morphismes induits par le foncteur de Hai :

$$\mathrm{Ext}_{\mathcal{P}}^*(F^{(r)}, G^{(r)}) \rightarrow \mathrm{Ext}_{\mathcal{U}}^*(\Phi^r F(F(1)), \Phi^r G(F(1)))$$

sont toujours injectifs. Via le foncteur de Hai, on obtient la suite

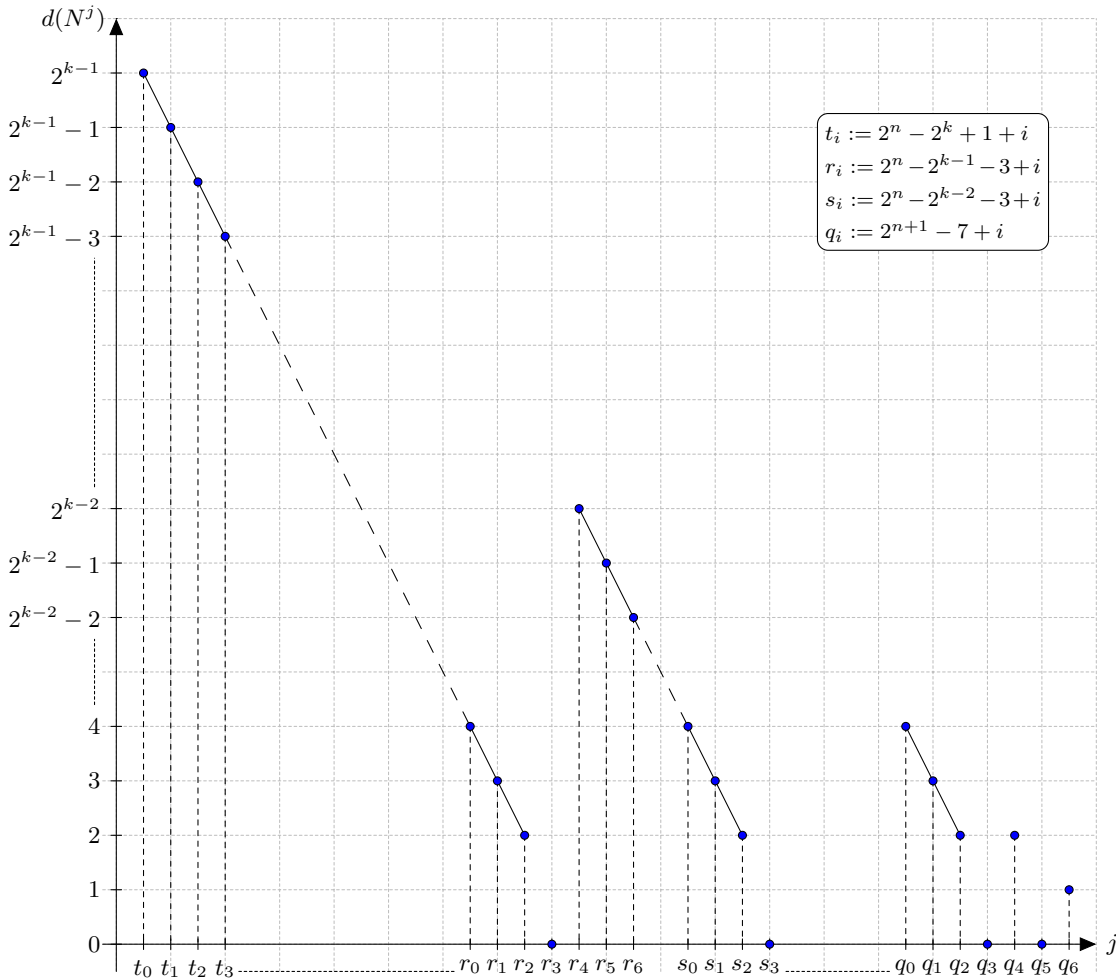
$$\cdots \rightarrow \text{Ext}_{\mathcal{U}}^*(\Phi^r F(F(1)), \Phi^r G(F(1))) \xrightarrow{\text{Ext}^*(\Phi, \Phi)} \text{Ext}_{\mathcal{U}}^*(\Phi^r F(F(1)), \Phi^r G(F(1))) \rightarrow \cdots$$

On étudiera dans le chapitre 4 les morphismes $\text{Ext}^*(\Phi, \Phi)$ pour le cas $F = G = I$. On calcule ici les groupes $\text{Ext}_{\mathcal{U}}^*(\Phi^r F(1), \Phi^r F(1))$ dans plusieurs cas particuliers. En observant que

$$\text{Ext}_{\mathcal{U}}^*(\Phi^r F(1), \Phi^r F(1)) \cong \text{Ext}_{\mathcal{U}}^*(\Phi^r F(1), F(1))$$

on se ramène à calculer la résolution injective minimale de $F(1)$ et plus précisément, la partie nilpotente de cette résolution. Précisons : un module instable M est dit nilpotent si pour tout $x \in M$, il existe un entier n tel que $Sq^{2^n|x|} Sq^{2^{n-1}|x|} \dots Sq^{|x|} x = 0$; le module M sera dit réduit si $Sq^{|x|} x \neq 0$ pour tout $0 \neq x \in M$. Il est montré dans [LS89, théorème 3.1] qu'un module injectif instable I se décompose en somme directe d'un module réduit R et d'un module nilpotent N . Notant $d(M)$ le plus grand degré n tel que M^n soit non trivial, on présente le premier résultat de ce chapitre :

Théorème 4.3.3.11. *On note $(I^\bullet, \partial^\bullet) = (N^\bullet \oplus R^\bullet, \partial^\bullet)$ la résolution injective minimale de $F(1)$, R^\bullet et N^\bullet désignant la partie réduite et la partie nilpotente respectivement. Alors les modules N^j sont finis et leur plus grand degré non-trivial est présenté par :*



Plus exactement, on démontre que la partie nilpotente de la résolution injective minimale de $F(1)$

est périodique et on connaît plusieurs termes de cette partie :

Théorème 4.3.3.17. *La partie nilpotente de la résolution injective minimale de $F(1)$ est périodique :*

$$N^{2^n-2^k+t} = N^{2^k+t}$$

pour tout $0 \leq t \leq 2^{k-1} - 1$. Notant $A_{2^n+3} := \bigoplus_{\substack{0 \leq i \leq n-2 \\ 2 \leq j}} J(2^n - 2^i - 2^{i-j})$ et

$$J \begin{pmatrix} n_1 \\ \vdots \\ n_k \end{pmatrix} := \bigoplus_{i=1}^k J(n_i),$$

on a :

k	$2^n - 23$	$2^n - 22$	$2^n - 21$	$2^n - 20$	$2^n - 19$	$2^n - 18$	$2^n - 17$
N^k	$J(8)$	$J(\binom{7}{6})$	$J(\binom{6}{4})$	$J(5)$	$J(4)$	$J(3)$	$J(2)$
k	$2^n - 16$	$2^n - 15$	$2^n - 14$	$2^n - 13$	$2^n - 12$	$2^n - 11$	$2^n - 10$
N^k	0	$J(8)$	$J(\binom{7}{6})$	$J(\binom{6}{4})$	$J(5)$	$J(4)$	$J(3)$
k	$2^n - 9$	$2^n - 8$	$2^n - 7$	$2^n - 6$	$2^n - 5$	$2^n - 4$	$2^n - 3$
N^k	$J(2)$	0	$J(4)$	$J(3)$	$J(2)$	0	$J(2)$
k	$2^n - 2$	$2^n - 1$	2^n	$2^n + 1$	$2^n + 2$	$2^n + 3$	$2^n + 4$
N^k	0	$J(1)$	0	$J(2^{n-1})$	$J \begin{pmatrix} 2^{n-1}-1 \\ 2^{n-1}-2 \\ \vdots \\ 2^{n-1}-2^{n-3} \end{pmatrix}$	$J(2^{n-2}) \oplus A_{2^n+3}$?

On en déduit :

Théorème 4.3.3.18. *Pour $n > k \geq 2$ et $-16 \leq t \leq 2$ on a des monomorphismes*

$$\text{Ext}_{\mathcal{U}}^{2^n-2^k+t}(\Phi^r F(1), \Phi^r F(1)) \hookrightarrow \text{Ext}_{\mathcal{U}}^{2^n-2^k+t}(\Phi^{r+1} F(1), \Phi^{r+1} F(1))$$

pour tout r .

Les colimites des suites $\{\text{Ext}_{\mathcal{U}}^s(\Phi^n F(1), \Phi^n F(1)), \text{Ext}^s(\Phi, \Phi)\}_{n \geq 0}$ coïncident avec $\text{Ext}_{\mathcal{F}}^s(I, I)$ pour tout $s \geq 0$. Ces derniers ont été calculés dans [FLS94, théorème 7.3] :

Théorème 4.3.1.7. *L'algèbre $\text{Ext}_{\mathcal{F}}^*(I, I)$ est une \mathbb{F}_2 -algèbre commutative. Elle est engendrée par les classes $e_n \in \text{Ext}_{\mathcal{F}}^{2^{n+1}}(I, I)$ et admet la présentation suivante*

$$\text{Ext}_{\mathcal{F}}^*(I, I) \cong \mathbb{F}_2[e_0, e_1, \dots, e_n, \dots] / \langle e_n^2, n \in \mathbb{N} \rangle$$

$\langle e_n^2, n \in \mathbb{N} \rangle$ désignant l'idéal engendré par les puissances 2-ièmes.

Les groupes $\text{Ext}_{\mathcal{U}}^{2^n}(\Phi^n F(1), \Phi^n F(1))$ sont engendrés par les éléments que l'on note aussi e_n par abus de notations, qui survivent à la colimite pour devenir des éléments $e_n \in \text{Ext}_{\mathcal{F}}^{2^n}(I, I)$. On note $\Phi^r e_n$ l'image dans $\text{Ext}_{\mathcal{U}}^{2^n}(\Phi^{n+r} F(1), \Phi^{n+r} F(1))$ de e_n sous l'application $\text{Ext}_{\mathcal{U}}^{2^n}(\Phi^r, \Phi^r)$. On dit qu'un élément $x \in \text{Ext}_{\mathcal{U}}^t(\Phi^r F(1), \Phi^r F(1))$ admet une n -ième racine de Frobenius si il existe un élément $y \in \text{Ext}_{\mathcal{U}}^{t-n}(\Phi^r F(1), \Phi^r F(1))$ tel que $\Phi^n y = x$ et que $\text{Ext}_{\mathcal{U}}^{t-n-1}(\Phi^r F(1), \Phi^r F(1)) = 0$.

On montrera que le produit de Yoneda $e_n \Phi^{n-1} e_1$ admet une 1-ième racine de Frobenius et $e_n \Phi e_{n-1} \dots \Phi^{n-1} e_1$ admet une $(n-1)$ -ième racine de Frobenius. Cela amène à formuler la conjecture suivante :

Conjecture 4.3.3.1. *Le produit de Yoneda $e_n \Phi^{r_1} e_{n-r_1} \dots \Phi^{r_k} e_{n-r_k}$ admet une $(n-k)$ -ième racine de Frobenius où $1 \leq r_1 < r_2 < \dots < r_k$.*

Cependant, la torsion de Frobenius ne se comporte pas aussi bien avec les groupes d'extensions dans \mathcal{U} en général. Les morphismes

$$\mathrm{Ext}_{\mathcal{U}}^*(\Phi^r F(F(1)), \Phi^r G(F(1))) \rightarrow \mathrm{Ext}_{\mathcal{U}}^*(\Phi^{r+1} F(F(1)), \Phi^{r+1} G(F(1)))$$

ne sont pas injectifs à priori. Un contre exemple sera donné dans le deuxième paragraphe du chapitre.

L'algèbre homologique dans la catégorie \mathcal{U} est compliqué faute de résolutions injectives et projectives des modules instables. On en connaît peu. On donnera ici quelques résolutions projectives explicites :

Corollaire 1.1.4.17. *Il y a trois suites exactes longues*

$$\begin{aligned} & \rightarrow F(n) \xrightarrow{Sq^1} F(n-1) \xrightarrow{Sq^1} \dots \xrightarrow{Sq^1} F(4) \xrightarrow{Sq^1} F(3) \twoheadrightarrow \Lambda^2(F(1)), \\ & \rightarrow F(n) \xrightarrow{Sq^1} F(n-1) \xrightarrow{Sq^1} \dots \xrightarrow{Sq^1} F(3) \xrightarrow{Sq^1} F(2) \twoheadrightarrow \Phi F(1), \\ & \rightarrow F(n) \xrightarrow{Sq^1} F(n-1) \xrightarrow{Sq^1} \dots \xrightarrow{Sq^1} F(2) \xrightarrow{Sq^1} F(1) \twoheadrightarrow \Sigma \mathbb{F}_2, \end{aligned}$$

$Sq^1 : F(n+1) \rightarrow F(n)$ désignant le seule morphisme non-trivial déterminé par $\iota_{n+1} \mapsto Sq^1 \iota_n$. Ce sont des résolutions projectives minimales de $\Lambda^2(F(1))$, $\Phi F(1)$ et $\Sigma \mathbb{F}_2$ respectivement.

L'objectif du chapitre 3 est d'expliciter les résolutions injectives minimales de $\Sigma^n \mathbb{F}_2$ pour n assez petits. Le cas général reste encore mystérieux. Toutefois, on obtient un algorithme élémentaire, basé sur la suite exacte courte de Mahowald, pour calculer les résolutions injectives minimales de ces objets. Les modules $\Sigma^n \mathbb{F}_2$ sont simple dans la catégorie \mathcal{U} et leurs enveloppes injectives sont les modules de Brown-Gitler $J(n)$. Ces modules sont finis. De plus, leur suspension $\Sigma J(n)$ s'insèrent dans les suites exactes courtes de Mahowald

$$0 \rightarrow \Sigma J(n) \rightarrow J(n+1) \rightarrow J\left(\frac{n+1}{2}\right) \rightarrow 0, \quad (\text{Mahowald})$$

$J(\frac{n+1}{2})$ désignant $J(k)$ si $n = 2k - 1$ et 0 sinon. Ces suites sont en fait des résolutions injectives minimales de $\Sigma J(n)$. Supposons par récurrence que l'on connaît une résolution injective de $\Sigma^d J(n)$. Comme le foncteur de suspension est exact, en prenant la suspension de cette résolution, on obtient une suite exacte longue dont chaque terme est une somme directe des suspensions de modules de Brown-Gitler. On se retrouve dans une situation similaire à celle de la construction d'hyper résolution. Cependant notre approche est différente de cette dernière. Au lieu de couper la suite exacte longue en suites exactes courtes, on rassemble les résolutions injectives de tous ces termes ensemble. Cela nous donne un diagramme qui n'est pas à priori un complexe double

mais dans notre contexte, on peut ajouter suffisamment de morphismes au diagramme pour le transformer en complexe double. La diagonale de celui-ci est donc une résolution injective de $\Sigma^{d+1}J(n)$. L'algorithme de BG que l'on introduira dans ce chapitre est la reformulation de la méthode pour obtenir une résolution injective de $\Sigma^{d+1}J(n)$ à partir de celle du $\Sigma^d J(n)$.

Chaque terme dans la résolution injective minimale de $\Sigma^n \mathbb{F}_2$ est une somme directe de module de Brown-Gitler [LS89, théorème 3.1]. Comme les modules $J(n)$ représentent les foncteurs $M \mapsto (M^n)^*$ on a alors

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{U}}(J(n+m), J(n)) \cong \left\langle Sq^I \iota_m | Sq^I \in \mathcal{A}_2, |Sq^I| = m, e(I) \leq n \right\rangle.$$

Les morphismes entre les modules de Brown-Gitler sont donc déterminés par les opérations de Steenrod. On notera $\bullet\theta$ un tel morphisme déterminé par l'opération θ . On montrera dans le chapitre 3 que le morphisme déterminé par l'opération de Bockstein Sq^1 joue un rôle important dans les résolutions injectives minimales de $\Sigma^n \mathbb{F}_2$. On démontrera d'abord que la suite de Bockstein

$$\cdots \rightarrow J(4k+2) \xrightarrow{\bullet Sq^1} J(4k+1) \xrightarrow{\begin{pmatrix} \bullet Sq^1 \\ \bullet Sq^{2k} \end{pmatrix}} J(4k) \oplus J(2k+1) \xrightarrow{(\bullet Sq^1, 0)} J(4k-1) \rightarrow \cdots$$

est exacte puis on observira qu'une grande partie de la résolution injective minimale de $\Sigma^n \mathbb{F}_2$ coïncide avec cette suite. Pour chaque entier n on note $\tau(n)$ le premier indice à partir duquel la résolution injective minimale de $\Sigma^n \mathbb{F}_2$ devient la suite de Bockstein. On obtiendra :

Théorème 3.2.2.2. *On a*

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$\tau(n)$	0	0	0	0	2	3	3	4	4	5	5	5
n	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
$\tau(n)$	6	5	5	5	6	7	7	8	8	9	9	9

et $\tau(12k+i) = 4k + \tau(i)$ pour $5 \leq i \leq 16$. Alors si $i > \tau(n)$ et $j \geq 1$ on a

$$\mathrm{Ext}_{\mathcal{U}}^i(\Sigma^j \mathbb{F}_2, \Sigma^n \mathbb{F}_2) = \begin{cases} \mathbb{F}_2 & \text{si } i+j = n, \\ \mathbb{F}_2 & \text{si } i = 4k-1 \text{ et } j = 2k, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Les lecteurs courageux sont invités à comparer nos résultats avec ceux introduits dans [Lin92]. Lin y a présenté des résolutions injectives de $\Sigma^d \mathbb{F}_2$ obtenues à l'aide de Λ -algèbre mais celles-ci sont souvent non-minimales.

Organisation du manuscrit

Le chapitre 1 est consacré aux généralités sur les modules instables. Au premier paragraphe, on rappelle les définitions des modules et algèbres instables. Au cours du deuxième paragraphe, on décrit la catégorie des modules instables en précisant ses objets injectifs et projectifs. On y rappelle la catégorie des foncteurs \mathcal{F} , le foncteur de Lannes T et son rôle important dans la relation entre la catégorie \mathcal{U} et la catégorie \mathcal{F} . Le troisième paragraphe sera consacré à la preuve du théorème 1.3.2.11 et dans le quatrième, on rappelle la filtration nilpotente de la catégorie \mathcal{U} introduite par Schwartz dans [Sch88, §1]. L'introduction aux pseudo hyper résolutions, essentielles pour la construction de résolutions injectives minimales de $\Sigma^d \mathbb{F}_2$ au cours du chapitre 3, sera présentée dans la dernière section de ce chapitre. C'est une version naïve de l'hyper résolution [CE99, XVII] mais s'avère être efficace dans la catégorie \mathcal{U} .

Dans le chapitre 2, on commence par une introduction rapide à la catégorie des foncteurs polynomiaux stricts. On rappellera ensuite le foncteur de Hai et la relation entre la catégorie \mathcal{U} des modules instables et la catégorie des foncteurs polynomiaux stricts. Pour terminer ce chapitre, on démontrera que la sous-catégorie des foncteurs polynomiaux stricts de degré d peut être considéré comme une sous-catégorie pleine de \mathcal{U} via le foncteur de Hai.

Le chapitre 3 s'attache à la construction de la résolution injective minimale de $\Sigma^d J(n)$. Basé sur les pseudo-hyper résolutions, on présente un algorithme élémentaire pour déterminer les résolutions injectives minimales de $\Sigma^d \mathbb{F}_2$. Les preuves des résultats principaux obtenus dans ce chapitre seront faits à la fin mais le nombre de pages à lire est un peu décourageant.

Le chapitre 4 expose de l'information sur la partie nilpotente de la résolution injective minimale de $F(1)$, nécessaire pour calculer les groupes $\mathrm{Ext}_{\mathcal{U}}^*(\Phi^r F(1), \Phi^r F(1))$. On peut donc démontrer l'injectivité de l'application $\mathrm{Ext}^*(\Phi, \Phi)$ dans plusieurs cas particuliers.

On trouvera dans les appendices les codes du programme de Maple qu'on a utilisé au cours du chapitre 3 pour calculer les résolutions injectives minimales de $\Sigma^d \mathbb{F}_2$. On donnera également des exemples de calculs dans la catégorie \mathcal{U} .

Modules instables

L'ALGÈBRE DE STEENROD a été introduite dans les années 60 par Norman Steenrod dans le but d'étudier la cohomologie singulière modulo p . L'action de cette algèbre, combiné avec la structure d'algèbre graduée commutative de la cohomologie singulière, donne naissance à la définition des modules et algèbres instables. Dans ce chapitre, on donne une introduction rapide à la catégorie \mathcal{U} des modules instables. La plupart de contenu du chapitre se trouve dans divers références dont notamment [Ste62, Gab62, Sch94]... Une nouvelle preuve de la caractérisation de la filtration de Krull de la catégorie \mathcal{U} sera donnée à la fin. Cette démonstration est plus simple que celle de [Sch94] et proche de celle de [Kuh13], mais contrairement à cette dernière, la nôtre reste dans la catégorie \mathcal{U} .

1.1 L'algèbre de Steenrod et modules instables

A travers cette section, sauf mention explicite à une autre référence, on renvoie à [Ste62, Sch94].

1.1.1 Les opérations cohomologiques

Fixons les notations. On note \mathbb{F}_p le corps fini de cardinal premier p . On désigne par $\mathcal{T}op$ la catégorie des espace topologiques et par $\mathcal{V}_{\mathbb{F}_p}$ la catégorie des \mathbb{F}_p –espaces vectoriels. La cohomologie singulière et la cohomologie singulière réduite modulo p d'un espace topologique X seront notées H^*X et \tilde{H}^*X respectivement sans préciser le corps de base \mathbb{F}_p . L'action de \mathbb{F}_p et le cup-produit fait de H^*X une \mathbb{F}_p –algèbre graduée commutative. La représentabilité des foncteurs $H^n : \mathcal{T}op \rightarrow \mathcal{V}_{\mathbb{F}_p}$ munit H^*X d'une autre structure algébrique que nous allons préciser.

Théorème 1.1.1.1. *Le foncteur $H^n : \mathcal{T}op \rightarrow \mathcal{V}_{\mathbb{F}_p}$ est représentable. On note $K(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}, n)$ l'objet représentant et on l'appelle l'espace d'Eilenberg Mac Lane. Plus précisément, on a des isomorphismes naturels en X :*

$$[X, K(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}, n)] \cong H^n X.$$

Remarque 1.1.1.2. *Les applications entre les espaces d'Eilenberg Mac Lane induisent les transformations naturelles entre les foncteurs H^n .*

Définition 1.1.1.3. Soit p un nombre premier. On appelle opération naturelle stable de degré r de la cohomologie singulière modulo p la donnée pour tout entier n d'une transformation naturelle de foncteurs

$$\varphi_r : H^n(-; \mathbb{F}_p) \rightarrow H^{n+r}(-; \mathbb{F}_p),$$

satisfaisant à la condition de stabilité : $\varphi_r \circ \Sigma = \Sigma \circ \varphi_r$. Plus précisément, pour tout espace topologique X et pour tout $x \in \tilde{H}^n(X; \mathbb{F}_p)$ on a l'égalité

$$\varphi_r(\Sigma x) = \Sigma(\varphi_r(x)).$$

Proposition 1.1.1.4. La donnée d'une telle famille est équivalente à celle d'une famille d'applications

$$\kappa_r : K(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}, n) \rightarrow K(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}, n+r),$$

faisant commuter les diagrammes

$$\begin{array}{ccc} [X, K(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}, n-1)] & \xrightarrow{(\Omega\kappa_r)^*} & [X, K(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}, n-1+r)] \\ \parallel & & \parallel \\ [\Sigma X, K(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}, n)] & \xrightarrow{\kappa_r^*} & [\Sigma X, K(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}, n+r)] \end{array}$$

pour tout espace X .

Démonstration. La proposition est une conséquence directe du lemme de Yoneda. \square

Proposition-Définition 1.1.1.5. L'ensemble de ces opérations, avec la somme et la composition comme produit, constitue une \mathbb{F}_p -algèbre graduée que l'on notera \mathcal{A}_p et que l'on appelle l'algèbre de Steenrod. Il existe une famille d'opérations Sq^i de degré i pour $p=2$ (P^i de degré $2i(p-1)$, $i > 0$ et β de degré 1 tel que $\beta^2 = 0$ pour $p > 2$) qui forme un système de générateurs pour \mathcal{A}_p .

Ces opérations satisfont aux relations d'Adem :

pour $p=2$:

$$Sq^a Sq^b = \sum_0^{\lfloor \frac{a}{2} \rfloor} \binom{b-j-1}{a-2j} Sq^{a+b-j} Sq^j \quad (\text{Adem-2})$$

pour tous $a, b > 0$;

pour $p > 2$:

$$\begin{aligned} P^a P^b &= \sum_0^{\lfloor \frac{a}{p} \rfloor} (-1)^{a+j} \binom{(p-1)(b-j)-1}{a-pj} P^{a+b-j} P^j \\ P^a \beta P^b &= \sum_0^{\lfloor \frac{a}{p} \rfloor} (-1)^{a+j} \binom{(p-1)(b-j)}{a-pj} P^{a+b-j} P^j \\ &\quad + \sum_0^{\lfloor \frac{a-1}{p} \rfloor} (-1)^{a+j-1} \binom{(p-1)(b-j)-1}{a-pj-1} P^{a+b-j} \beta P^j \end{aligned} \quad (\text{Adem-p})$$

pour tous $a, b > 0$.

Les opérations Sq^0 et P^0 sont les unités de l'algèbre de Steenrod pour $p = 2$ et $p > 2$ respectivement.

Avec cette définition on a :

Théorème 1.1.1.6. *Pour tout espace X , sa cohomologie singulière modulo p est naturellement un module sur l'algèbre de Steenrod \mathcal{A}_p .*

1.1.2 La condition d'instabilité et les objets instables

1.1.2.1 Modules instables

Théorème 1.1.2.1. *Soit X un espace topologique. Sa cohomologie modulo p est un \mathcal{A}_p -module qui satisfait aux conditions suivantes que l'on appelle **instabilité**.*

1. pour $p = 2$: si $x \in H^n X$ et $i > n$, alors $Sq^i x = 0$;
2. pour $p > 2$: si $x \in H^n X$ et $e + 2i > n$, $e = 0, 1$, alors $\beta^e P^i x = 0$.

Définition 1.1.2.2. *Un module sur l'algèbre de Steenrod est dit **instable** si il satisfait à la condition d'instabilité. La sous-catégorie pleine de la catégorie \mathcal{M} des \mathcal{A}_p -modules dont les objets sont instables est notée \mathcal{U} ; elle est abélienne.*

Notation 1.1.2.3. *Soit x un élément homogène d'un module instable M . On désigne par $|x|$ son degré : $x \in M^n$ implique $|x| = n$.*

Remarque 1.1.2.4. *Les modules instables sont nuls en degrés négatifs. En effet, les opérations Sq^0 et P^0 sont les unités de \mathcal{A}_2 et \mathcal{A}_p respectivement. Il s'ensuit que si x est de degré négatif, alors*

$$x = Sq^0 x = 0, (x = P^0 x = 0).$$

1.1.2.2 Algèbres instables

Théorème 1.1.2.5. *La cohomologie modulo p d'un espace X , munie du cup-produit, est une \mathbb{F}_p -algèbre \mathbb{N} -graduée, commutative, unitaire et reliée à la structure de \mathcal{A}_p -module par deux propriétés :*

(\mathcal{C}) **la formule de Cartan** : si $p = 2$:

$$Sq^i(xy) = \sum_{k+l=i} Sq^k x Sq^l y,$$

si $p > 2$:

$$P^i(xy) = \sum_{k+l=i} P^k x P^l y;$$

$$\beta(xy) = (\beta x)y + (-1)^{|x|} x\beta y,$$

pour tous $x, y \in H^* X$;

(\mathcal{F}) **action de restriction** : si $p = 2$: $Sq^{|x|}(x) = x^2$ pour tout $x \in H^n X, n \geq 0$;

si $p > 2$: $P^{\frac{|x|}{2}}(x) = x^p$ pour tout $x \in H^{2k} X, k \geq 0$.

Définition 1.1.2.6. Une \mathcal{A}_p -algèbre instable K est un module instable muni d'une structure de \mathbb{F}_p -algèbre commutative, unitaire dont le produit vérifie les propriétés \mathcal{C} et \mathcal{F} . On note \mathcal{K} la catégorie des \mathcal{A}_p -algèbres instables dont les morphismes sont les applications d'algèbres, \mathcal{A}_p -linéaires de degré zéro. On dit algèbre instable au lieu de \mathcal{A}_p -algèbre instable.

Proposition 1.1.2.7. Le produit tensoriel $M \otimes_{\mathbb{F}_p} N$ de deux modules instables M, N est muni d'une action de l'algèbre de Steenrod donnée par la formule de Cartan qui fait de ce produit un module instable. On note dorénavant $M \otimes N$ au lieu de $M \otimes_{\mathbb{F}_p} N$ et la structure d'instabilité de ce module est celle donnée par la formule de Cartan.

1.1.3 La base de Cartan-Serre

Pour $p = 2$: soit $I = (i_1, i_2, \dots, i_n)$ une suite d'entiers, elle sera dite *admissible* si $2i_\alpha \geq i_{\alpha+1}$ pour tout α . Étant donné que I est admissible, on définit son excès par la formule :

$$e(I) = (i_1 - 2i_2) + (i_2 - 2i_3) + \dots + (i_{n-1} - 2i_n) + i_n. \quad (1.1.1)$$

Bien plus, à I on associe l'opération $Sq^{i_1}Sq^{i_2}\dots Sq^{i_n}$ que l'on note Sq^I . Cette opération est appelée *monôme admissible* de Cartan-Serre de \mathcal{A}_2 .

Pour $p > 2$: on considère des suites $I = (\epsilon_0, i_1, \epsilon_1, i_2, \dots, i_n, \epsilon_n)$, les ϵ_i valant 0 ou 1. Elles seront dites *admissibles* si $i_h \geq pi_{h+1} + \epsilon_h$ pour $h \geq 1$ ($i_{n+1} = 0$). Soit I une telle suite, son excès est défini par :

$$e(I) = 2(i_1 - pi_2) + 2(i_2 - pi_3) + \dots + 2(i_{n-1} - pi_n) + 2i_n + \epsilon_0 - \epsilon_1 - \dots - \epsilon_n. \quad (1.1.2)$$

On lui associe l'opération $P^I = \beta^{\epsilon_0}P^{i_1}\dots\beta^{\epsilon_n}$ appelée *monôme admissible* de Cartan-Serre de \mathcal{A}_p .

Les monômes admissibles forment un système de générateurs de l'algèbre de Steenrod :

Théorème 1.1.3.1. Les opérations admissibles déterminent une base de \mathcal{A}_p en tant qu'espace vectoriel gradué sur \mathbb{F}_p .

1.1.4 Les objets projectifs et injectifs de la catégorie \mathcal{U}

Rappelons que \mathcal{M} est la catégorie des modules sur l'algèbre de Steenrod, reliée avec la catégorie \mathcal{U} par le foncteur oubli \mathcal{O} . La catégorie \mathcal{M} est abélienne et \mathcal{U} l'est aussi. On peut donc faire de l'algèbre homologique dans la catégorie \mathcal{U} . En particulier, on peut discuter des objets projectifs et injectifs de la catégorie \mathcal{U} . Cette sous-section a pour but de caractériser ces objets. On montre ainsi que \mathcal{U} possède assez d'injectifs et de projectifs.

1.1.4.1 Les projectifs

Définition 1.1.4.1. On associe à un entier t le module instable $\Sigma^t\mathbb{F}_p$ concentré en degré t et $(\Sigma^t\mathbb{F}_p)^t = \mathbb{F}_p$. On définit la t -ième suspension Σ^t comme un endofoncteur de la catégorie \mathcal{U} qui, à un module instable M associe le produit tensoriel

$$\Sigma^t M := M \otimes \Sigma^t\mathbb{F}_p.$$

Notant n un entier supérieur¹ à t , par abus de notation, un élément de $(\Sigma^t M)^n$ sera noté $\Sigma^t x$ où x notant élément correspondant dans M^{n-t} .

Théorème 1.1.4.2. *Soit $M \in \mathcal{M}$, on désigne par $B(M)$ son sous-espace vectoriel engendré par les éléments de la forme $Sq^I x$ (resp. P^I) pour tout $x \in M$ et pour tout I admissible d'excès strictement supérieur à $|x|$. Le quotient $M/B(M)$ définit un foncteur*

$$\mathcal{D} : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{U}$$

que l'on appelle foncteur de déstabilisation. Il est adjoint à gauche du foncteur oubli. On a alors des isomorphismes

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{M}}(M, N) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{U}}(\mathcal{D}M, N),$$

fonctoriels en M et en N .

Proposition-Définition 1.1.4.3. *Il y a des morphismes*

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{M}}(\Sigma^n \mathcal{A}_p, N) \cong N^n,$$

naturels en N . Le module $\mathcal{D}(\Sigma^n \mathcal{A}_p)$, noté par $F(n)$, satisfait donc aux isomorphismes

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{U}}(F(n), N) \cong N^n$$

naturels en N .

Les modules $F(n)$ sont donc projectifs puisque les foncteurs $N \mapsto N^n$ sont exacts. D'après le théorème 1.1.4.2, ces modules sont cycliques :

Proposition 1.1.4.4. *Le module $F(n)$ est librement engendré de manière instable. Plus précisément*

$$F(n) = \begin{cases} \mathbb{F}_2 \langle Sq^I \iota_n | I \text{ est admissible de l'excès majoré par } n \rangle & \text{pour } p = 2, \\ \mathbb{F}_p \langle P^I \iota_n | I \text{ est admissible de l'excès majoré par } n \rangle & \text{pour } p > 2. \end{cases}$$

par un générateur ι_n de degré n correspondant à le seul générateur de $\Sigma^n \mathbb{F}_p$.

De plus, on a :

Proposition 1.1.4.5. *Soit M un module instable. Le morphisme*

$$\bigoplus_{x \in M} F(|x|) \rightarrow M$$

$$\iota_{|x|} \mapsto x$$

est surjectif.

On a tout fait pour assurer que la catégorie \mathcal{U} a assez de projectifs.

1. Le module $\Sigma^t \mathbb{F}_p$ est $(t-1)$ -connexe. C'est à dire $(\Sigma^t \mathbb{F}_p)^k = 0$ pour tout $k \leq t-1$. Par définition, $\Sigma^t M$ est $(t-1)$ -connexe donc est nul sur les degrés inférieur à $t-1$.

Les morphismes entre les $F(n)$

Soient M un module instable et f un morphisme $F(n) \rightarrow M$. Compte tenu du fait que les modules $F(n)$ sont monogènes, il suffit de calculer l'image de $\iota_n \in F(n)$ afin de déterminer le morphisme f . En particulier, si $M = F(m)$ pour certain entier m , l'image de $\iota_n \in F(n)$ est de la forme $\theta_{\iota_n} \in F(m)$ pour certaine opération de Steenrod θ . Pour cette raison, un objet f de $\text{Hom}_{\mathcal{U}}(F(n), F(m))$ est déterminé par une opération de Steenrod θ_f . Par abus de notation, on note θ_f un tel objet.

L'action de groupe symétrique

Le groupe \mathfrak{S}_n agit par permutation sur le produit tensoriel $F(1)^{\otimes n}$. Lannes et Zarati ont observé qu'en prenant ses invariants, on récupère le module $F(n)$.

Proposition 1.1.4.6 ([LZ87, lemme A.1.7]). *Pour $p = 2$ on a $F(n) \cong (F(1)^{\otimes n})^{\mathfrak{S}_n}$.*

Le cas p impair s'avère être plus compliqué. Dans ce cas, le module $F(1)$ peut être identifié avec le sous \mathcal{A}_p -module de $H^*B\mathbb{Z}_p \cong \Lambda^*(t, |t| = 1) \otimes \mathbb{F}_2[u, |u| = 2]$ engendré par la classe t . Pour $n \geq 2$, l'opération P^1 agit trivialement sur la classe $t^{\otimes n}$. Cependant, cette opération P^1 doit agir librement sur la classe $\iota_n \in F(n)$. Alors le module $\Gamma^n(F(1)) = (F(1)^{\otimes n})^{\mathfrak{S}_n}$ n'est pas de bon candidat pour $F(n)$. On modifie donc la catégorie \mathcal{U} pour avoir le résultat analogue pour le cas $p > 2$.

Proposition-Définition 1.1.4.7. *On note \mathcal{U}' la sous-catégorie pleine de \mathcal{U} qui contient tous les modules concentrés en degrés pairs. Il y existe des générateurs projectifs $F'(2n)$, monogènes engendrés par les ι'_{2n} de degré $2n$.*

Proposition 1.1.4.8. *Pour $p > 2$, dans la catégorie \mathcal{U}' , on a*

$$F'(2n) \cong (F'(2)^{\otimes n})^{\mathfrak{S}_n}.$$

1.1.4.2 La torsion de Frobenius dans la catégorie \mathcal{U}

Les opérations Sq_0 et P_0

Soit x un élément homogène d'un module instable M . On définit :

1. pour $p = 2$:

$$Sq_0 x = Sq^{|x|} x;$$

2. pour $p > 2$:

$$P_0 x = \begin{cases} P^{\frac{|x|}{2}} x & \text{si } x \text{ est de degré pair,} \\ \beta P^{\frac{|x|-1}{2}} x & \text{si } x \text{ est de degré impair.} \end{cases}$$

On a donc :

Proposition 1.1.4.9 (voir e.g. [Sch94, I.1.7]). *Les opérations Sq_0 et P_0 satisfont aux conditions suivantes :*

1. pour $p = 2$:

$$Sq^i Sq_0 x = \begin{cases} Sq_0 Sq^{\frac{i}{2}} x & \text{si } i \equiv 0(2), \\ 0 & \text{si } i \equiv 1(2); \end{cases}$$

2. pour $p > 2$:

$$P^i P_0 x = \begin{cases} P_0 P^{\frac{i}{p}} x & \text{si } i \equiv 0(p), \\ P_0 \beta P^{\frac{i-1}{p}} x & \text{si } i \equiv 1(p) \text{ et } |x| \equiv 1(2), \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Soit M un module instable. Il résulte des formules ci-dessus que le sous-objet $Sq_0 M$ (resp. $P_0 M$) est un sous-module instable de M .

Proposition 1.1.4.10. *Il y a un seul morphisme non-trivial $F(n) \rightarrow \Sigma F(n-1)$, déterminé par le générateur $\Sigma \iota_{n-1}$ de $\Sigma F(n-1)$ en degré n . Le noyau de ce morphisme est $Sq_0(F(n))$ si $p = 2$ et est $P_0(F(n))$ si $p > 2$.*

On a donc les suites exactes :

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & Sq_0(F(n)) & \longrightarrow & F(n) & \longrightarrow & \Sigma F(n-1) \longrightarrow 0 \\ 0 & \longrightarrow & P_0(F(n)) & \longrightarrow & F(n) & \longrightarrow & \Sigma F(n-1) \longrightarrow 0 \end{array} \quad (C)$$

On les reformule en introduisant le foncteur $\Phi : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{U}$ défini par les formules ci-dessous.

Définition 1.1.4.11. *Soit M un module instable. On définit un endofoncteur Φ de la catégorie \mathcal{U} par la formule suivante.*

Pour $p = 2$:

$$(\Phi M)^n = \begin{cases} M^{\frac{n}{2}} & \text{si } n \equiv 0(2), \\ 0 & \text{si } n \equiv 1(2). \end{cases}$$

Pour $p > 2$:

$$(\Phi M)^n = \begin{cases} M^{\frac{n}{p}} & \text{si } n \equiv 0(2p), \\ M^{1+\frac{n-2}{p}} & \text{si } n \equiv 2(2p), \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On note Φx l'élément de ΦM correspondant à $x \in M$. L'action de l'algèbre de Steenrod sur ΦM est donnée par les formules suivantes :

$$\begin{aligned} Sq^i \Phi x &= Sq^i Sq_0 x, \\ P^i \Phi x &= P^i P_0 x, \\ \beta \Phi x &= 0. \end{aligned} \quad (\text{Frobenius-u})$$

On note $\lambda_M : \Phi M \rightarrow M$ défini par $\lambda_M x = Sq_0 x$ ($\lambda_M x = P_0 x$) pour tout $x \in M$. Le morphisme λ_M est \mathcal{A}_p -linéaire parce que M est instable. Le module M est dit **réduit** si λ_M est injectif.

Puisque l'action de l'algèbre de Steenrod sur ΦM est donnée par les formules Frobenius-u, le foncteur Φ est donc la version de Frobenius dans la catégorie \mathcal{U} .

L'adjoint à gauche du foncteur Σ et ses dérivés

Proposition 1.1.4.12 ([Sin78],[LZ87],[Sch94, 1.7.4]). *Le noyau et le conoyau de λ_M sont des suspensions. Cela définit les foncteurs Ω et Ω_1 de \mathcal{U} dans lui même par les formules :*

$$\begin{aligned}\mathrm{Ker}(\lambda_M) &= \Sigma\Omega_1 M, \\ \mathrm{Coker}(\lambda_M) &= \Sigma\Omega M.\end{aligned}$$

Autrement dit, on a une suite exacte

$$0 \rightarrow \Sigma\Omega_1 M \rightarrow \Phi M \rightarrow M \rightarrow \Sigma\Omega M \rightarrow 0, \quad (1.1.3)$$

fonctorielle en M . De plus, le foncteur Ω est adjoint à gauche de la suspension Σ et Ω_1 est son premier foncteur dérivé (à gauche). Ses autres foncteurs dérivés sont triviaux.

En effet on peut avoir plus d'informations sur les foncteurs dérivés du foncteur Ω^n .

Proposition 1.1.4.13 ([Sin78, proposition 2.3]). *Les foncteurs dérivés Ω_s^n du foncteur Ω^n sont triviaux dès que $s > n$ et le foncteur Ω_n^n est l'itéré n -fois du foncteur Ω_1^1 .*

Démonstration. Si $n > 1$ le foncteur Ω^n se factorise comme la composition $\Omega^1 \circ \Omega^{n-1}$. Le foncteur Σ est exacte. Comme Ω est son adjoint à gauche, il préserve les projectifs de la catégorie \mathcal{U} . Plus précisément, $\Omega(F(n)) \cong F(n-1)$. En effet :

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}_{\mathcal{U}}(\Omega F(n), M) &\cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{U}}(F(n), \Sigma M) \\ &\cong \Sigma M^{n-1} \\ &\cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{U}}(F(n-1), M)\end{aligned}$$

pour tout module instable M . Dans ce cas, la suite spectrale de Grothendieck pour Ω et Ω^{n-1} est reformulée :

$$E_2^{s,r} := \Omega_s^1 \circ \Omega_r^{n-1} \implies \Omega_{r+s}^n.$$

La proposition 1.1.4.12 permet d'établir la récurrence et le résultat en découle. \square

Remarque 1.1.4.14. 1. *On a des bijections*

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{U}}(\Omega M, N) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{U}}(M, \Sigma N),$$

naturelles en M et en N . Le morphisme $M \rightarrow \Sigma\Omega M$ de la suite exacte dans la proposition 1.1.4.12 est l'unité de l'adjonction.

2. *L'isomorphisme $\Omega F(n) \cong F(n-1)$ permet de reformuler les suites exactes 1.1.3 :*

$$0 \rightarrow \Phi F(n) \rightarrow F(n) \rightarrow \Sigma\Omega F(n) \rightarrow 0.$$

3. *Soient M et N deux modules instables. Comme ces modules sont \mathbb{N} -gradués on peut*

décomposer $M \otimes N$ en somme directe $P(M, N) \oplus IP(M, N)$ où :

$$P(M, N) = \bigoplus_n \left(\bigoplus_{k+l=n} M_{2k} \otimes N_{2l} \right);$$

$$IP(M, N) = \bigoplus_n \left(\bigoplus_{k+l=n} (M_{2k+1} \otimes N_{2l}) \oplus (M_{2k} \otimes N_{2l+1}) \oplus (M_{2k+1} \otimes N_{2l+1}) \right).$$

Alors, chaque élément $x \in M \otimes N$ peut s'interpréter de façon unique comme la somme

$$P(M, N)(x) + IP(M, N)(x)$$

où $P(M, N)(x) \in P(M, N)$ et $IP(M, N)(x) \in IP(M, N)$.

4. Soient L, M et N des modules instables et $\alpha : L \rightarrow M \otimes N$. On peut définir un morphisme des modules instables $\Phi(\alpha) : \Phi L \rightarrow \Phi M \otimes \Phi N$ par les formules suivantes :

$$\Phi(\alpha)(\Phi(x)) = \begin{cases} \sum_i \Phi m_i \otimes \Phi n_i & \text{si } |x| \equiv 0(2) \text{ et } P(M, N)(\alpha(x)) = \sum_i m_i \otimes n_i; \\ \sum_i \Phi m_i \otimes \Phi n_i & \text{si } |x| \equiv 1(2) \text{ et } \alpha(x) = \sum_i m_i \otimes n_i. \end{cases}$$

Le morphisme $\Phi(\mathbb{I}d_{M \otimes N})$ est isomorphe pour $p = 2$ mais ne l'est plus en général pour $p > 2$.

Proposition 1.1.4.15. *Les foncteurs Φ et Σ admettent des adjoints à droite, notés par $\tilde{\Phi}$ et $\tilde{\Sigma}$ respectivement. On a donc les bijections*

$$\text{Hom}_{\mathcal{U}}(\Phi M, N) \cong \text{Hom}_{\mathcal{U}}(M, \tilde{\Phi} N),$$

$$\text{Hom}_{\mathcal{U}}(\Sigma M, N) \cong \text{Hom}_{\mathcal{U}}(M, \tilde{\Sigma} N),$$

naturelles en M et en N . De plus, les foncteurs $\tilde{\Sigma}\Sigma$ et $\tilde{\Phi}\Phi$ sont équivalents au foncteur identité.

En effet :

$$\text{Hom}_{\mathcal{U}}(\tilde{\Phi}\Phi M, N) \cong \text{Hom}_{\mathcal{U}}(\Phi M, \Phi N) \cong \text{Hom}_{\mathcal{U}}(M, N),$$

$$\text{Hom}_{\mathcal{U}}(\tilde{\Sigma}\Sigma M, N) \cong \text{Hom}_{\mathcal{U}}(\Sigma M, \Sigma N) \cong \text{Hom}_{\mathcal{U}}(M, N),$$

pour tout N .

La suite à la Bockstein

L'opération Sq^1 est nilpotent. En effet, $(Sq^1)^2 = 0$. Elle induit alors la suite à la Bockstein projectif :

$$F(n+1) \xrightarrow{\varepsilon_{n+1}} F(n) \xrightarrow{\varepsilon_n} F(n-1) \quad (1.1.4)$$

$\varepsilon_n, \varepsilon_{n+1}$ notant Sq^1 . Cette suite n'est pas seulement un complexe, elle est en fait exacte.

Proposition 1.1.4.16. *La suite à la Bockstein projectif 1.1.4 est exacte.*

Démonstration. Un élément de $\text{Ker}(\varepsilon_n)$ est de la forme $\sum_{\alpha=1}^n Sq^{I_{\alpha,1}} \iota_n$ où $(I_{\alpha,1})$ est admissible de l'excès majoré par n . Le noyau de ε_n est donc engendré par $Sq^1(\iota_n)$. Le module $\langle Sq^1(\iota_n) \rangle$ est quant à lui l'image de ε_{n+1} . Il résulte de la coïncidence de $\text{Ker}(\varepsilon_n)$ et $\text{Im}(\varepsilon_{n+1})$ que la suite est exacte. \square

Corollaire 1.1.4.17. *Il y a trois suites exactes longues :*

$$\begin{aligned} \rightarrow F(n) \xrightarrow{Sq^1} F(n-1) \xrightarrow{Sq^1} \dots \xrightarrow{Sq^1} F(4) \xrightarrow{Sq^1} F(3) \rightarrow \Lambda^2(F(1)) \rightarrow 0, \\ \rightarrow F(n) \xrightarrow{Sq^1} F(n-1) \xrightarrow{Sq^1} \dots \xrightarrow{Sq^1} F(3) \xrightarrow{Sq^1} F(2) \rightarrow \Phi F(1) \rightarrow 0, \\ \rightarrow F(n) \xrightarrow{Sq^1} F(n-1) \xrightarrow{Sq^1} \dots \xrightarrow{Sq^1} F(2) \xrightarrow{Sq^1} F(1) \rightarrow \Sigma \mathbb{F}_2 \rightarrow 0. \end{aligned}$$

A propos de la cyclicité de produits tensoriels $F(n) \otimes F(m)$

Les modules $F(n) \otimes F(m)$ sont finiment engendrés. De plus, ils sont monogènes dans le sens suivant.

Proposition 1.1.4.18. *Pour tous $n, m \in \mathbb{N}$, il existe un élément $\alpha \in F(n) \otimes F(m)$ tel que pour tout $x \in F(n) \otimes F(m)$, il y a un entier k et une opération de Steenrod θ pour que $\theta\alpha = Sq_0^k(x)$.*

Démonstration. Soit q un nombre tel que $2^q > n + m$. On va montrer que $\alpha = \iota_n \otimes Sq_0^q \iota_m$.

On commence par vérifier que pour tout élément $\iota_n \otimes \delta \iota_m$ où $\delta \in \mathcal{A}_2$, on a

$$Sq_0^q(\iota_n \otimes \delta \iota_m) \in \mathcal{A}_2(\iota_n \otimes Sq_0^q \iota_m).$$

En effet, il suffit de le démontrer pour tout δ parcourant à travers la base additive de \mathcal{A}_2 . On choisit $\delta = Sq^I$ et montre que

$$\iota_n \otimes Sq_0^q \delta \iota_m \in \mathcal{A}_2(\iota_n \otimes Sq_0^q \iota_m) \quad (1.1.5)$$

pour tout $\delta \in \mathcal{A}_2$. En effet, l'hypothèse $2^q > n + m$ implique

$$\begin{aligned} \iota_n \otimes Sq_0^q \delta \iota_m &= \iota_n \otimes Sq^{2^q I} Sq_0^q \iota_m \\ &= Sq^{2^q I}(\iota_n \otimes Sq_0^q \iota_m) \end{aligned}$$

et donc cet élément appartient à $\mathcal{A}_2(\iota_n \otimes Sq_0^q \iota_m)$.

Afin de montrer que $Sq_0^q(\iota_n \otimes \delta \iota_m) \in \mathcal{A}_2(\iota_n \otimes Sq_0^q \iota_m)$, on démontre par récurrence sur t que $Sq_0^t \iota_n \otimes Sq_0^q \delta \iota_m \in \mathcal{A}_2(\iota_n \otimes Sq_0^q \iota_m)$.

1. Le cas $t = 0$ est évident selon la remarque 1.1.5.
2. On suppose qu'on l'a vérifié pour tout $t < k$. On passe au cas $t = k$. D'après la formule de Cartan, on a

$$Sq^{n2^{k-1}}(Sq_0^{k-1} \iota_n \otimes Sq_0^q \delta \iota_m) = \sum_{i=0}^n Sq^{i2^{k-1}} Sq_0^{k-1} \iota_n \otimes Sq^{(n-i)2^{k-1}} Sq_0^q \delta \iota_m.$$

Par hypothèse de récurrence, $Sq_0^{k-1} \iota_n \otimes Sq_0^q \delta \iota_m \in \mathcal{A}_2(\iota_n \otimes Sq_0^q \iota_m)$ pour tout $\delta \in \mathcal{A}_2$. On va montrer que chaque élément $Sq^{i2^{k-1}} Sq_0^{k-1} \iota_n \otimes Sq^{(n-i)2^{k-1}} Sq_0^q \delta \iota_m$ appartient à $\mathcal{A}_2(\iota_n \otimes Sq_0^q \iota_m)$ pour tout $\delta \in \mathcal{A}_2$. Pour ce faire, on montre de nouveau par récurrence sur $i \leq n$.

- (a) Si $i = 0$ on peut reformuler $Sq^{i2^{k-1}} Sq_0^{k-1} \iota_n \otimes Sq^{(n-i)2^{k-1}} Sq_0^q \delta \iota_m$ comme l'élément $Sq_0^{k-1} \iota_n \otimes Sq_0^q Sq^{(n-i)2^{k-2}} \delta \iota_m$. Cet élément quant à lui appartient à $\mathcal{A}_2(\iota_n \otimes Sq_0^q \iota_m)$ par

hypothèse sur t .

- (b) On suppose que $Sq^{i2^{t-1}}Sq_0^{t-1}\iota_n \otimes Sq^{(n-i)2^{t-1}}Sq_0^q\delta_{\iota_m}$ appartient à $\mathcal{A}_2(\iota_n \otimes Sq_0^q\iota_m)$ pour $i \leq l-1$. En utilisant la formule de Cartan on obtient

$$Sq^{l2^{t-1}}Sq_0^{t-1}\iota_n \otimes Sq^{(n-i)2^{t-1}}Sq_0^q\delta_{\iota_m} = Sq^{l2^{t-1}}(Sq_0^{t-1}\iota_n \otimes Sq^{(n-i)2^{t-1}}Sq_0^q)\delta_{\iota_m} \\ - \sum_{i=0}^{l-1} Sq^{i2^{t-1}}Sq_0^{t-1}\iota_n \otimes Sq^{(l-i)2^{t-1}}Sq_0^q\delta_{\iota_m}.$$

Il en découle que $Sq^{l2^{t-1}}Sq_0^{t-1}\iota_n \otimes Sq^{(n-i)2^{t-1}}Sq_0^q\delta_{\iota_m}$ appartient à $\mathcal{A}_2(\iota_n \otimes Sq_0^q\iota_m)$ pour tout δ dans \mathcal{A}_2 .

Il suit que $Sq_0^t\iota_n \otimes Sq_0^q\delta_{\iota_m}$ appartient à $\mathcal{A}_2(\iota_n \otimes Sq_0^q\iota_m)$ pour tout t . En particulier, pour $t = q$, l'élément $Sq_0^q(\iota_n \otimes \delta_{\iota_m})$ appartient à $\mathcal{A}_2(\iota_n \otimes Sq_0^q\iota_m)$ pour tout $\delta \in \mathcal{A}_2$.

On montre maintenant que pour tout monôme admissible $\theta \in \mathcal{A}_2$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $Sq_0^N(\theta\iota_n \otimes \delta_{\iota_m})$ appartient à $\mathcal{A}_2(\iota_n \otimes Sq_0^q\iota_m)$ pour tout $\delta \in \mathcal{A}_2$. On raisonne par récurrence sur le degré de θ . Le cas de degré 0 a été vérifié précédemment. Supposons que l'affirmation est vérifiée pour tout monôme admissible θ de degré majoré par k . Soit Sq^l un monôme admissible de degré $k+1$. Pour une raison technique on sépare son premier terme Sq^l et on note $Sq^l = Sq^l\omega$. Par la formule de Cartan on a

$$Sq^l\omega\iota_n \otimes \delta_{\iota_m} = Sq^l(\omega\iota_n \otimes \delta_{\iota_m}) - \sum_{i=0}^{l-1} Sq^i\omega\iota_n \otimes Sq^{(l-i)}\delta_{\iota_m}.$$

Suivant l'hypothèse de récurrence il existe N tel que

$$Sq_0^N(Sq^l\omega\iota_n \otimes \delta_{\iota_m}) \in \mathcal{A}_2(\iota_n \otimes Sq_0^q\iota_m)$$

pour tout $\delta \in \mathcal{A}_2$. □

1.1.4.3 Le foncteur de Lannes et les modules instables injectifs

La catégorie \mathcal{U} possède de bonnes propriétés. Avant de les préciser, rappelons quelques définitions. Sauf mention explicite à une autre référence, on renvoie à [Gab62].

Définition 1.1.4.19. *Un objet d'une catégorie (le plus souvent abélienne, mais pas nécessairement) est dit **noethérien** si toute suite croissante de sous-objets stationne. Une catégorie abélienne est dite **localement noethérienne** si elle possède un ensemble de générateurs noethériens. Un objet est dit de **type fini** si toute suite croissante de sous-objets dont la co-limite égale l'objet de départ est stationnaire.*

Théorème 1.1.4.20. *Soit \mathcal{A} une catégorie abélienne possédant des co-limites et que les co-limites filtrantes y sont exactes, un objet est noethérien si et seulement si tous ses sous-objets sont de type fini. Dans une catégorie localement noethérienne, tout objet de type fini est noethérien.*

Un produit des modules injectifs reste injective. Par contre, une somme directe quelconque des modules injectifs n'est pas injective à priori. Toutefois :

Théorème 1.1.4.21 ([Gab62, IV.2, proposition 6]). *Dans une catégorie localement noethérienne, une somme directe de modules injectifs reste encore injective.*

Théorème 1.1.4.22 ([MP67]). *La catégorie \mathcal{U} est localement noethérienne. Tous les sous-modules d'un module instable finiment engendré sont finiment engendrés.*

Pour cette raison, il suffit de déterminer les modules instables injectifs indécomposables afin de classer les modules instables injectifs.

Modules de Brown-Gitler

Théorème 1.1.4.23 ([BG73, théorème 1.1]). *On note $T(n)$ le dual du spectre de Brown-Gitler $B(n)$. Sa cohomologie modulo p que l'on note $J(n)$ et que l'on appelle module de Brown-Gitler est un objet cocyclique dans la catégorie \mathcal{U} . Étant caractérisé par la formule $\mathrm{Hom}_{\mathcal{U}}(M, J(n)) \cong (M^n)^*$ pour tout $M \in \mathcal{U}$, ce module forme un objet injectif de \mathcal{U} . De plus, il est indécomposable.*

Comme $\mathrm{Hom}_{\mathcal{U}}(M, J(m)) \cong (M^m)^*$, chaque élément $u \in M^m$ détermine un morphisme $i_u : M \rightarrow J(m)$. Les morphismes i_u induit le morphisme :

$$i_M : M \hookrightarrow \prod_n \prod_{u \in M^m} J(m).$$

Il dérive de la proposition directe suivante que la catégorie \mathcal{U} possède assez d'injectifs.

Proposition 1.1.4.24. *Le morphisme i_M est un monomorphisme pour tout module instable M .*

Remarque 1.1.4.25. *Rappelons qu'un morphisme $\theta : F(m) \rightarrow F(n)$ est déterminé par $\theta(\iota_m)$ donc par une opération de Steenrod ω dont l'excès est majoré par $m - n$. En tant que l'espace vectoriel gradué, on a $J(n)^m \cong (F(m)^n)^*$. Les morphismes $\gamma : (F(m))^n \rightarrow (F(m - |\gamma|))^n$ déterminent la structure de module instable sur $J(n)$.*

La proposition suivante est une reformulation de ce qu'on vient de remarquer.

Proposition 1.1.4.26. *Il y a des bijections :*

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_{\mathcal{U}}(J(n+m), J(n)) &\cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{U}}(F(n+m), F(n)) \\ &\cong \left\langle Sq^I \iota_m \mid Sq^I \in \mathcal{A}_2, |Sq^I| = m, e(I) \leq n \right\rangle. \end{aligned}$$

Remarque 1.1.4.27. 1. *Un morphisme $J(n) \rightarrow J(m)$ correspond à une forme linéaire sur $J(n)^m$ et donc à une opération de Steenrod $\mathcal{A}_2 \ni \varphi : J(n)^m \rightarrow J(n)^n \cong \mathbb{F}_2$. On le note $\bullet\varphi$.*
2. *Les modules de Brown-Gitler sont finis ; $J(0) \cong \mathbb{F}_2$, tous les autres $J(n)$ sont connexes et donc nilpotents.*

Notation 1.1.4.28. *Soit M un module instable fini. On note $d(M)$ le plus grand degré n tel que M^n soit non trivial. La notion peut s'étendre à tout module instable en admettant que $d(M) = \infty$ si il n'existe pas un entier n tel que $M^k = 0$ pour tout $k > n$.*

Par définition, on obtient :

Lemme 1.1.4.29. *Étant donnée une suite exacte courte*

$$0 \rightarrow M \rightarrow N \rightarrow P \rightarrow 0$$

on a :

$$d(N) = \max \{d(M), d(P)\}.$$

Lemme 1.1.4.30. *Si M est un module fini, son enveloppe injective l'est aussi. De plus si $d(M) = n$, il en est de même pour son enveloppe injective. Par conséquent, la dimension injective de M est majorée par $n - 1$.*

Démonstration. Par définition des modules de Brown-Gitler, on a l'injection

$$M \hookrightarrow \prod_m \prod_{u \in M^m} J(m) =: I.$$

Comme M est fini, I l'est aussi. De plus, $M^n \rightarrow I^n$ est un isomorphisme. On en déduit que l'enveloppe injective E de M est finie et $M^n \cong E^n$. En remplaçant M par E/M on a un module fini dont le plus grand degré non trivial est majorée par $n - 1$. En raisonnant par récurrence, il est facile de montrer que la dimension injective de M est majorée par $n - 1$. \square

Notation 1.1.4.31. 1. *Pour un entier n , on note :*

$$J\left(\frac{n}{2}\right) = \begin{cases} J(k) & \text{if } n = 2k, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

2. *Soit $I = \bigoplus_{\alpha} J(k_{\alpha})$. On note :*

$$\text{Aug}_n(I) = \bigoplus_{\alpha} J(n + k_{\alpha}), \quad (1.1.6)$$

$$\text{Div}_n(I) = \bigoplus_{\alpha} J\left(\frac{n + k_{\alpha}}{2}\right). \quad (1.1.7)$$

On note $\text{Div}(I)$ pour $\text{Div}_0(I)$.

Lemme 1.1.4.32. *On a*

$$\begin{aligned} \tilde{\Sigma}J(n) &= J(n - 1), \\ \tilde{\Phi}J(n) &= \begin{cases} J(k) & \text{si } n = 2k, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \end{aligned}$$

Démonstration. Pour un module instable M on a

$$\begin{aligned} \text{Hom}_{\mathcal{U}}(M, \tilde{\Sigma}J(n)) &\cong \text{Hom}_{\mathcal{U}}(\Sigma M, J(n)) \\ &\cong ((\Sigma M)^n)^* \\ &\cong \text{Hom}_{\mathcal{U}}(M, J(n - 1)). \end{aligned}$$

On en déduit $\tilde{\Sigma}J(n) = J(n-1)$. De manière similaire on obtient les résultats sur $\tilde{\Phi}J(n)$. \square

Théorème 1.1.4.33 (Suite exacte de Mahowald). *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la résolution injective minimale dans \mathcal{U} du module $\Sigma J(n)$ provient de la suite exacte courte suivante*

$$0 \rightarrow \Sigma J(n) \xrightarrow{\sigma_n} J(n+1) \xrightarrow{\bullet Sq^{\frac{n+1}{2}}} J\left(\frac{n+1}{2}\right) \rightarrow 0 \quad (\text{Mahowald})$$

σ_n étant l'adjoint de l'identité $J(n) \rightarrow \tilde{\Sigma}J(n+1) \cong J(n)$. En particulier $J(2n+1) \cong \Sigma J(2n)$. Étant donné un morphisme $\varphi : J(n+1) \rightarrow J(m+1)$, le diagramme suivant est commutatif

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \Sigma J(n) & \xhookrightarrow{\quad} & J(n+1) & \xrightarrow{\bullet Sq^{\frac{n+1}{2}}} & J\left(\frac{n+1}{2}\right) \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow \tilde{\Sigma}\varphi & & \downarrow \varphi & & \downarrow \tilde{\Phi}\varphi \\ 0 & \longrightarrow & \Sigma J(m) & \xhookrightarrow{\quad} & J(m+1) & \xrightarrow[\bullet Sq^{\frac{m+1}{2}}]{} & J\left(\frac{m+1}{2}\right) \longrightarrow 0 \end{array} \quad (1.1.8)$$

Remarque 1.1.4.34. La commutativité du diagramme 1.1.8 provient des paires des foncteurs adjoints $(\Sigma, \tilde{\Sigma})$ et $(\Phi, \tilde{\Phi})$, et plus précisément, du fait que le diagramme ci-dessous commute.

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \Sigma \tilde{\Sigma}J(n+1) & \xhookrightarrow{\quad} & J(n+1) & \xrightarrow{\bullet Sq^{\frac{n+1}{2}}} & \tilde{\Phi}J(n+1) \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow \Sigma \tilde{\Sigma}\varphi & & \downarrow \varphi & & \downarrow \tilde{\Phi}\varphi \\ 0 & \longrightarrow & \Sigma \tilde{\Sigma}J(m+1) & \xhookrightarrow{\quad} & J(m+1) & \xrightarrow[\bullet Sq^{\frac{m+1}{2}}]{} & \tilde{\Phi}J(m+1) \longrightarrow 0 \end{array}$$

Proposition 1.1.4.35. Étant donné Sq^I un monôme admissible où $I = (i_n, i_{n-1}, \dots, i_1, i_0)$, on a des égalités

$$\tilde{\Sigma}(\bullet Sq^I) = \bullet Sq^I, \quad \tilde{\Phi}(\bullet Sq^I) = \bullet Sq^{\frac{i_n}{2}, \dots, \frac{i_0}{2}}.$$

Notation 1.1.4.36. On note $\mathcal{A} = \mathbb{F}_2[x_i \mid 0 \leq i \in \mathbb{N}, |x_i| = (1, 2^i)]$.

Le théorème suivant donne une description globale des modules de Brown-Gitler.

Théorème 1.1.4.37 (Miller). *On désigne par J_* la somme directe des modules de Brown-Gitler $\bigoplus_{k \geq 0} J(k)$. Un élément $x \in J(k)^l$ est dit de bi-degré (l, k) . Les applications uniques non-triviales $J(n) \otimes J(m) \rightarrow J(n+m)$ déterminent une structure de \mathbb{F}_2 -algèbre bi-graduée commutative. Pour $p = 2$ le module J_*^* est isomorphe à l'algèbre polynomiale \mathcal{A} . L'action de l'algèbre de Steenrod est donnée par $Sq^1 x_k = x_{k-1}^2$ et la formule de Cartan.*

Corollaire 1.1.4.38. Soit $\sum_{i=1}^k 2^{n_i}$ l'expression 2-adique de d . On a

$$\begin{aligned} (J(d))^d &= \langle x_0^d \rangle, \\ (J(d))^k &= \left\langle \prod_{i=1}^k x_{n_i} \right\rangle, \\ (J(d))^t &= 0 \text{ pour } k > t \text{ ou } t > d. \end{aligned}$$

On donnera dans la suite la caractérisation des modules injectifs indécomposables réduits. Pour ce faire, on aura besoin de rappels sur les partitions d'un entier.

Partitions d'un entier

On appelle partition d'un entier n une suite $\lambda = (r_k)_{k \geq 1}$ d'entiers naturels tels que $\sum_{k=1}^{+\infty} kr_k = n$. L'entier r_k s'appelle la multiplicité de k dans la partition λ . Si $r_k \geq 1$ on dit que k est une part de la partition. Il existe une unique partition de 0, elle ne possède aucune part et se note 0. La partition $\lambda = (r_k)_{k \geq 1}$ se note formellement $(1_{r_1}, 2_{r_2}, \dots)$. On associe à cette partition la suite $((k_1)_{r_{k_1}}, (k_2)_{r_{k_2}}, \dots, (k_t)_{r_{k_t}})$ de ses parts. La taille de la partition $\lambda = (r_k)_{k \geq 1}$ est par définition l'entier $r = \sum_{k=1}^{+\infty} r_k$.

On définira la suite $(\lambda_i)_{r \geq i \geq 1}$ comme suit.

$$\lambda_{r_{k_t} + r_{k_{t-1}} + \dots + r_{k_i} + j} = k_{i-1} \text{ pour } 1 \leq j \leq r_{k_{i-1}}.$$

On obtient une suite décroissante $(\lambda_i)_{r \geq i \geq 1}$ telle que $\sum_{i=1}^r \lambda_i = n$.

On constate que, réciproquement, la donnée d'une suite $(\lambda_i)_{r \geq i \geq 1}$ décroissante d'entiers positifs détermine une unique partition λ de l'entier $n = \sum_{i=1}^r \lambda_i$ dont la taille est r et la suite des parts est la suite donnée.

Définition 1.1.4.39. 1. Dorénavant, une partition est une suite décroissante finie λ d'entiers.

2. La longueur d'une partition λ est le nombre d'entiers de la suite, noté $l(\lambda)$. Par la suite on identifiera une partition λ et le $l(\lambda)$ -uplet $(\lambda_1, \dots, \lambda_{l(\lambda)})$.

3. Une partition λ est dite 2-régulière si $\lambda_i > \lambda_{i+1}$ pour $1 \leq i < l(\lambda)$; le corps de base étant fixé à \mathbb{F}_2 , nous parlerons par la suite simplement de partition régulière.

4. Le degré d'une partition λ (ou le poids) est l'entier positif $|\lambda| = \sum_{i=1}^{l(\lambda)} \lambda_i$. Une partition de n est par définition une partition de degré n .

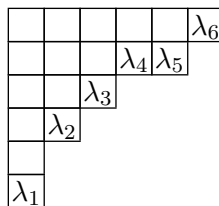
5. Soient λ et μ deux partitions de même degré. On notera $\lambda \leq \mu$ si pour tout n on a

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i \leq \sum_{i=1}^n \mu_i.$$

On remarque que si $\lambda \leq \mu$ alors

$$l(\lambda) \geq l(\mu)$$

6. On peut représenter une n -partition $(\lambda_i)_{r \geq i \geq 1}$ par un diagramme de n carrés rangés en r colonnes, la $i^{\text{ème}}$ colonne contenant exactement λ_i carrés.



7. Si l'on transpose le diagramme d'une partition $\lambda = (\lambda_i)_{i \geq 1}$ de n par rapport à la diagonale on obtient un diagramme associé à une nouvelle partition $\lambda' = (\lambda'_i)_{i \geq 1}$ de n , que l'on appelle la conjuguée de λ . On remarque que $\lambda'_j = \text{card} \{i | \lambda_i \geq j\}$.

Les modules injectifs indécomposables réduits

Définition 1.1.4.40. On note :

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \left\{ L | L \text{ est facteur direct indécomposable de } H^*(B\mathbb{Z}_2^{\oplus n}) \right\} / \sim, \\ \mathcal{L}_d &= \left\{ L | L \in \mathcal{L}, L \subset H^*(B\mathbb{Z}_2^{\oplus d}) \setminus H^*(B\mathbb{Z}_2^{\oplus d-1}) \right\} / \sim \\ \mathcal{P}_d &= \left\{ P | P \text{ est } \mathbb{F}_p[\text{GL}(\mathbb{Z}_p^{\oplus d})] - \text{module projectif indécomposable} \right\} / \sim, \\ \mathcal{S}_d &= \left\{ S | S \text{ est } \mathbb{F}_p - \text{représentation simple de } \text{GL}_d(\mathbb{Z}_p) \right\} / \sim \end{aligned}$$

Définition 1.1.4.41 (Régularité d'une partition). Une partition $(\lambda_1, \dots, \lambda_d)$ est 2-régulière pour les colonnes si elle satisfait aux conditions

$$\begin{aligned} \lambda_1 &\geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_d = 1 \\ \lambda_i - \lambda_{i+1} &\leq 1, \quad 1 \leq i \leq d-1. \end{aligned}$$

Elle est 2-régulière si

$$\lambda_i > \lambda_{i+1}, \quad 1 \leq i \leq d-1.$$

La proposition suivante est élémentaire et classique :

Proposition 1.1.4.42. Soit $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_d)$ une partition 2-régulière. Sa conjuguée est 2-régulière pour les colonnes.

On peut maintenant énoncer les relations entre les ensembles définis dans 1.1.4.40 :

Théorème 1.1.4.43 ([HK88]). La correspondance

$$\begin{aligned} R_d : \mathcal{L}_d &\longrightarrow \mathcal{P}_d \\ L &\longmapsto \text{Hom}_{\mathcal{U}} \left(L, H^*(B\mathbb{Z}_2^{\oplus d}) \right) \bigotimes_{\mathbb{F}_p[\text{End}(\mathbb{Z}_2^{\oplus d})]} \mathbb{F}_p[\text{GL}(\mathbb{Z}_2^{\oplus d})] \end{aligned}$$

détermine une bijection entre \mathcal{L}_d et \mathcal{P}_d .

On remarque que le foncteur de l'enveloppe projective $\mathcal{S}_d \rightarrow \mathcal{P}_d$ et le foncteur de socle $\mathcal{P}_d \rightarrow \mathcal{S}_d$ sont inverses l'un de l'autre. On en déduit :

Théorème 1.1.4.44 ([Jam80, JK81]). Les classes \mathcal{L}_d , \mathcal{P}_d et \mathcal{S}_d sont bijectives. Les \mathbb{F}_2 -représentations simples de $\text{GL}_d(\mathbb{Z}_2)$ sont indexés par les 2-partitions régulières. Soit λ une telle partition on note I_λ la \mathbb{F}_2 -représentation simple de $\text{GL}_d(\mathbb{Z}_2)$, P_λ son enveloppe projective et L_λ le module correspondant dans \mathcal{L}_d .

Proposition-Définition 1.1.4.45. Soit $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m)$ une 2-partition régulière. On note $\lambda' = (\lambda'_1, \lambda'_2, \dots, \lambda'_{\lambda_1})$ sa conjuguée. Alors λ' est une 2-partition régulière pour les colonnes.

On note n la somme $\sum_{i=1}^m \lambda_i$ et $V_{\lambda'}$ la \mathbb{F}_2 -représentation simple de \mathfrak{S}_n . On désigne par $e_{\lambda'}$ l'élément de $\mathbb{F}_2[\mathfrak{S}_n]$ tel que $V_{\lambda'} = e_{\lambda'} \mathbb{F}_2[\mathfrak{S}_n]$. On note S_{λ} le module $e_{\lambda'}(F(1)^{\otimes n})$ où \mathfrak{S}_n agit sur $F(1)^{\otimes n}$ par permutation.

On rappelle les propriétés importantes des modules S_{λ} .

Théorème 1.1.4.46 ([FS90]). *Soit $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m)$ une 2-partition régulière. On note $k+1 = \sum_{i=1}^m 2^{i-1} \lambda_i$ et $n = \sum_{i=1}^m \lambda_i$. Alors on a :*

1. S_{λ} est k -connexe.
2. Le foncteur $f(S_{\lambda}) \in \mathcal{F}_{\omega}$ est un foncteur simple de degré n .
3. On note $I_{(\lambda)}$ l'enveloppe injective de S_{λ} . Le module $I_{(\lambda)}$ est indécomposable.

La caractérisation des modules instables injectifs

Carlsson et Miller ont observé que la cohomologie modulo p d'un p -groupe abélien élémentaire est injective dans \mathcal{U} . Lannes et Zarati ont démontré ensuite que le produit tensoriel d'un tel module avec un module de Brown-Gitler reste injectif. Cela a donné la caractérisation des objets injectifs de la catégorie \mathcal{U} .

Théorème 1.1.4.47 ([LS89, théorème 3.1]). *Les modules injectifs indécomposables de la catégories \mathcal{U} sont les produits tensoriels $L \otimes J(n)$ entre un facteur direct indécomposable de \mathcal{A}_p -module $(H^*B\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^{\otimes d}$ et un module de Brown-Gitler. Puisque \mathcal{U} est localement noethérienne, un module instable injectif est la somme directe des modules de ces types.*

Soient I, J deux modules injectifs réduits alors leur produit $I \otimes J$ reste injectif. En effet, d'après le théorème 1.1.4.47, I et J sont facteurs directs de $(H^*B\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^{\otimes d_1}$ et $(H^*B\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^{\otimes d_2}$ respectivement pour certains d_1, d_2 . Il s'ensuit que $I \otimes J$ est un facteur direct de $(H^*B\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^{\otimes (d_1+d_2)}$ qui est, quant à lui, injectif. Cependant :

Proposition 1.1.4.48. *Le produit $J(n) \otimes J(m)$ n'est pas injectif dès que $n, m \geq 2$.*

Démonstration. On rappelle d'abord quelques notations. Soit d un entier et $\sum_{i=1}^k 2^{t_i}$ son expression 2-adique. On note : $\alpha(d) = k$.

D'après le théorème 1.1.4.37, on a

$$(J(n) \otimes J(m))^{n+m} = \langle x_0^n \otimes x_0^m \rangle, \quad (1.1.9)$$

$$(J(n) \otimes J(m))^{\alpha(n)+\alpha(m)} = \langle x_n \otimes x_m \rangle, \quad (1.1.10)$$

$$(J(n) \otimes J(m))^{n+m-1} = \langle x_0^{n-2} x_1 \otimes x_0^m, x_0^n \otimes x_0^{m-2} x_1 \rangle, \quad (1.1.11)$$

$$(J(n) \otimes J(m))^k = 0 \text{ pour } k < \alpha(n) + \alpha(m) \text{ ou } n + m < k. \quad (1.1.12)$$

On suppose par absurde que $J(n) \otimes J(m)$ est injectif. Selon le théorème 1.1.4.47, il devrait être la somme directe finie de modules de Brown-Gitler. D'après 1.1.9, il doit contenir une seule copie de

2. Les notations de f et \mathcal{F}_{ω} seront données dans la sous-section 1.2.1.

$J(n+m)$ et de $J(n+m-1)$. Puisque $(J(n+m))^{\alpha(n+m)} = \mathbb{F}_2$, alors $\alpha(n) + \alpha(m) \geq \alpha(n+m)$. Par ailleurs, $\alpha(d) + \alpha(a) \leq \alpha(d+a)$ pour tous d, a donc $\alpha(n) + \alpha(m) = \alpha(n+m)$.

On montre ensuite que n et m doivent être pairs. En effet, supposons que $n = 2k+1$. Alors $J(n) \otimes J(m) = \Sigma(J(2k) \otimes J(m))$ donc $J(n) \otimes J(m)$ devrait être la somme de modules de Brown-Gitler de formes $J(2l+1)$. Cela est contradictoire car $n+m$ et $n+m-1$ ne peuvent pas être impairs à la fois. On pose donc $n = 2n_1$ et $m = 2m_1$.

On note $1 + \sum_{i=1}^d 2^{t_i}$ l'expression 2-adique de $2(n_1 + m_1) - 1$. Alors

$$J(2(n_1 + m_1) - 1)^{d+1} = \left\langle x_0 \prod_{i=1}^d x_{t_i} \right\rangle.$$

Notons $\beta \in (J(n+m))^{d+1}$ l'élément correspondant à $y := x_0 \prod_{i=1}^d x_{t_i}$. Parce que $Sq^{d+1}y = 0$ alors $Sq^{d+1}\beta = 0$. Il en résulte que β est la somme d'éléments de forme $\prod_{i=1}^h x_{k_i} \otimes \prod_{j=1}^l x_{g_j}$ tel que $0 \in \{k_i, g_j \mid 1 \leq i \leq h, 1 \leq j \leq l\}$. Comme $n+m$ est pair, le nombre de 0 dans chaque ensemble doit être pair donc supérieur à 2. Il s'ensuit que $Sq^d\beta = 0$ alors que $Sq^d y = x_0 \prod_{i=1}^d x_{t_i-1}^2$. Cette contradiction montre que $J(n) \otimes J(m)$ ne peut être injectif. \square

Les foncteurs division et le foncteur de Lannes

Théorème 1.1.4.49 ([Lan87]). *Soit D un module instable de type fini. Le foncteur*

$$\begin{aligned} D \otimes - : \mathcal{U} &\longrightarrow \mathcal{U} \\ M &\longmapsto D \otimes M \end{aligned}$$

admet un adjoint à gauche que l'on note $N \mapsto (N : D)_{\mathcal{U}}$. Autrement dit, il y a des bijections naturelles

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{U}}((N : D)_{\mathcal{U}}, M) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{U}}(N, D \otimes M)$$

pour tous M et N . On appelle division par D le foncteur $(- : D)_{\mathcal{U}}$.

Remarque 1.1.4.50. 1. *La division par \mathbb{F}_p est le foncteur identité.*

2. *La division par $\Sigma^t \mathbb{F}_p$ est le foncteur Ω^t .*

Définition 1.1.4.51 ([Lan87]). *Le foncteur de Lannes T_V est la division par la cohomologie de l'espace classifiant BV d'un p -groupe abélien élémentaire V . La division par la cohomologie réduite de BV est notée par \bar{T}_V .*

Les propriétés du foncteur de Lannes

1. Les foncteur T_V et \bar{T}_V sont exacts puisque les modules H^*BV et \tilde{H}^*BV sont injectifs.
2. Puisque la cohomologie H^*BV se décompose en somme directe $\tilde{H}^*BV \oplus \mathbb{F}_p$, le foncteur T_V est équivalent à la somme $\bar{T}_V \oplus \mathbb{I}d$. On note $T := T_{\mathbb{F}_p}$ et $\bar{T} := \bar{T}_{\mathbb{F}_p}$.
3. $T_{\mathbb{F}_p^{\oplus d}} \cong T^d$.
4. Le foncteur T_V commutes avec les co-limites car il est adjoint à gauche du foncteur $H^*BV \otimes -$.

5. Le foncteur T_V commute avec les foncteurs $\Sigma, \Omega, \Phi, - \otimes -$. En effet, il y a des isomorphismes naturels :

$$(a) \quad T_V \Omega M \xrightarrow{\sim} \Omega T_V M.$$

$$(b) \quad T_V \Sigma M \xrightarrow{\sim} \Sigma T_V M.$$

$$(c) \quad T_V \Phi M \xrightarrow{\sim} \Phi T_V M.$$

$$(d) \quad T_V(M \otimes N) \xrightarrow{\sim} T_V M \otimes T_V N.$$

6. (a) $T_V(H^* BW) \cong H^* BW^{\text{Hom}_{V_{\mathbb{F}_p}}(V, W)}$ d'où

$$\text{Hom}_{\mathcal{U}}(H^* BW, H^* BV) \cong \mathbb{F}_p[\text{Hom}_{V_{\mathbb{F}_p}}(V, W)].$$

(b) $T_V J(n) \cong J(n)$. Il suit que le foncteur de Lannes préserve les modules injectifs.

(c) $TF(n) \cong \bigoplus_{i=0}^n F(i)$ d'où $\bar{T}F(n) \cong \bigoplus_{i=0}^{n-1} F(i)$. Il en découle que T et \bar{T} préservent les modules projectifs.

Le lemme suivant est élémentaire mais important.

Lemme 1.1.4.52. *Le foncteur T préserve les modules finiment engendrés.*

Démonstration. L'affirmation provient du calcul de $TF(n)$. Un module M est finiment engendré si et seulement si il y a un épimorphisme

$$\bigoplus_{i=0}^n F(i) \twoheadrightarrow M.$$

Compte tenu de l'exactitude du foncteur T et de l'isomorphisme $TF(n) = \bigoplus_{i=0}^n F(i)$ on obtient l'épimorphisme

$$\bigoplus_{i=0}^n \left(\bigoplus_{i=0}^i F(i) \right) \twoheadrightarrow TM$$

d'où le lemme. □

Comme \bar{T} est un facteur direct de T , il admet la même propriété que possède T .

La Sq^1 -acyclicité des modules instables injectifs réduits

Définition 1.1.4.53. *Un module instable M est dit Sq^1 -acyclique si la suite*

$$0 \rightarrow M^1 \xrightarrow{Sq^1} M^2 \xrightarrow{Sq^1} \dots \xrightarrow{Sq^1} M^n \xrightarrow{Sq^1} \dots$$

est exacte.

Proposition 1.1.4.54. *Les modules instables injectifs réduits sont Sq^1 -acyclique.*

Démonstration. Soit I un module injectif réduit. La suite exacte longue

$$\dots \xrightarrow{Sq^1} F(n) \xrightarrow{Sq^1} \dots \xrightarrow{Sq^1} F(2) \xrightarrow{Sq^1} F(1) \xrightarrow{Sq^1} \Sigma \mathbb{F}_2 \rightarrow 0$$

induit la suite exacte

$$0 = \mathrm{Hom}_{\mathcal{U}}(\Sigma \mathbb{F}_2, I) \xrightarrow{Sq^1} \mathrm{Hom}_{\mathcal{U}}(F(1), I) \xrightarrow{Sq^1} \cdots \xrightarrow{Sq^1} \mathrm{Hom}_{\mathcal{U}}(F(n), I) \xrightarrow{Sq^1} \cdots$$

Puisque $\mathrm{Hom}_{\mathcal{U}}(F(n), I) \cong I^n$, le module I est Sq^1 -acyclique. \square

Remarque 1.1.4.55. *Puisque $\mathrm{Hom}_{\mathcal{U}}(\Sigma \mathbb{F}_2, J(n)) = 0$ dès que $n > 1$, les modules $\{J(n), n > 1\}$ sont Sq^1 -acycliques.*

1.2 Catégories de foncteurs

Dans cette section on rappelle la définition générale de catégorie quotient au sens de Grothendieck. Cela est essentiel pour travailler dans la catégorie \mathcal{U} en négligeant certaines classes d'objets.

1.2.1 Foncteur de Lannes et la catégorie de foncteurs

Définition 1.2.1.1. *Soient R une algèbre sur un corps de base \mathbb{k} et M un $R - R$ -bimodule. On note \mathcal{M}_R^f la catégorie des R -modules libres finiment engendrés, $R\text{-mod}$ la catégorie des modules à gauche sur R et \mathcal{I} le foncteur d'inclusion de \mathcal{M}_R^f dans $R\text{-mod}$. On désigne par $\mathcal{F}(R)$ la catégorie de foncteurs de \mathcal{M}_R^f dans $R\text{-mod}$.*

Le foncteur f

On note $\mathcal{F} := \mathcal{F}(\mathbb{F}_p)$. Le foncteur de Lannes permet de relier les catégories \mathcal{U} et \mathcal{F} .

Théorème 1.2.1.2 ([HLS93, partie I, théorème 3.1 et proposition 3.2]). *L'application qui, à chaque module instable M associe l'espace vectoriel $T_V^0(M)$ définit un foncteur $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{F}$. Le foncteur f a de bonnes propriétés :*

1. *f est exact ;*
2. *Pour tous modules instables M et N , il y a une équivalence naturelle de foncteurs*

$$f(M) \otimes f(N) \cong f(M \otimes N);$$

3. *$f(\Phi^n M) = f(M)$ et en particulier $f(\Phi^n F(d)) = \Gamma^d$.*

En particulier, le foncteur f préserve les objets injectifs.

Proposition 1.2.1.3. *Le foncteur f envoie les modules injectifs vers les foncteurs injectifs.*

Démonstration. Soit V un 2-groupe abélien élémentaire. On a

$$f(H^*(BV)) \cong I_V : W \mapsto \mathbb{F}_2^{\mathrm{Hom}_{\mathcal{V}_{\mathbb{F}_2}}(W, V)}.$$

Le foncteur I_V représente le foncteur exact

$$\mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{V}_{\mathbb{F}_2}, \quad F \longmapsto (F(E))^\sharp$$

donc il est injectif dans \mathcal{F} . D'autre part, un module injectif $I \in \mathcal{U}$ s'écrit comme la somme directe $\bigoplus_{\lambda \in \Lambda} L_\lambda \otimes J(n_\lambda)$ où L_λ désigne un facteur direct de $H^*(BV_\lambda)$ pour certain 2-groupe abélien élémentaire V_λ . Il s'ensuit que

$$f \left(\bigoplus_{\lambda \in \Lambda} L_\lambda \otimes J(n_\lambda) \right) = \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} f(L_\lambda) \otimes f(J(n_\lambda)) = \bigoplus_{\lambda \in \Lambda, n_\lambda=0} f(L_\lambda).$$

Le foncteur f envoie donc les modules injectifs vers les foncteurs injectifs. \square

On note \mathcal{F}_ω la sous-catégorie pleine des foncteurs qui sont l'images de f . L'existence de l'adjoint de f ainsi que du foncteur induit $f' : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{F}_\omega$ est assurée par le théorème suivant.

Théorème 1.2.1.4 ([HLS93, partie I, section 7]). *Le foncteur f admet un adjoint à droite m . Il s'ensuit que f' en a aussi un que l'on note m' . Il y a un isomorphisme naturel*

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{F}_\omega}(f'(M), F) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{U}}(M, m'(F)).$$

De plus, $f'm'(F) \cong F$ pour tout $F \in \mathcal{F}_\omega$.

On dispose des catégories \mathcal{U} , \mathcal{F}_ω et des foncteurs f', m' qui s'accordent à la situation suivante :

Proposition-Définition 1.2.1.5. *Soient \mathcal{A}, \mathcal{B} deux catégories abéliennes et $T : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ un foncteur qui est adjoint à gauche du foncteur $S : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}$. Le foncteur T est exact et le foncteur $T \circ S$ est isomorphe au foncteur identité de \mathcal{B} . On note $\mathrm{Ker}(T)$ la sous-catégorie pleine formée des objets $A \in \mathcal{A}$ tel que TA est nul. La sous-catégorie $\mathrm{Ker}(T)$ de \mathcal{A} satisfait à la condition suivante :*

$$\mathrm{Ker}(T) \text{ est stable par sous-objet, quotient et extension.} \quad (\text{E})$$

En général, une sous-catégorie d'une catégorie abélienne est dite épaisse si elle est pleine et si elle satisfait à la condition (E).

Démonstration. On ne donne que la preuve pour le cas de \mathcal{U} , \mathcal{F}_ω , f' et m' . Le cas général est expliqué en détail dans [Gab62].

La condition (E) s'interprète comme suit : soit $0 \rightarrow M \rightarrow N \rightarrow P \rightarrow 0$ une suite exacte courte dans \mathcal{U} , N est un objet de $\mathrm{Ker}(f')$ si et seulement si M, P sont des objets de $\mathrm{Ker}(f')$. Puisque le foncteur f' est exact, on a :

$$f'(N) = 0 \Leftrightarrow f'(M) = f'(P) = 0.$$

La condition (E) est donc satisfaite. \square

Dans ce qui suit, on montre que la catégorie \mathcal{F} peut être considérée comme la catégorie quotient $\mathcal{U}/\mathrm{Ker}(T)$.

1.2.2 Catégories quotient par rapport à une sous-catégorie épaisse

Définition 1.2.2.1 ([Gab62, III.1]). *Soit \mathcal{S} une sous-catégorie épaisse de la catégorie abélienne \mathcal{A} , on construit une nouvelle catégorie que l'on note \mathcal{A}/\mathcal{S} et que l'on appelle **catégorie***

quotient de \mathcal{A} par \mathcal{S} .

1. $\text{Objets}(\mathcal{A}/\mathcal{S}) = \text{Objets}(\mathcal{A})$;
2. $\text{Hom}_{\mathcal{A}/\mathcal{S}}(C, D) = \varinjlim_{C', D'} \text{Hom}_{\mathcal{A}}(C', D/D')$ où $C/C', D' \in \mathcal{S}$.

1.2.2.1 Remarques et Propriétés

1. Soient A, B, C dans \mathcal{A} , $\bar{f} \in \text{Hom}_{\mathcal{A}/\mathcal{S}}(A, B)$ représenté par $f \in \text{Hom}_{\mathcal{A}}(A', B/B')$ et $\bar{g} \in \text{Hom}_{\mathcal{A}/\mathcal{S}}(B, C)$ représenté par $g \in \text{Hom}_{\mathcal{A}}(B'', C/C')$.

On pose $A'' = f^{-1}(B'' + B'/B')$ et $g(B' \cap B'') = C''/C'$. Alors $\bar{g} \circ \bar{f}$ est représenté par le composé

$$A'' \rightarrow B'' + B'/B' \cong B''/B' \cap B'' \rightarrow C/C''.$$

2. La catégorie \mathcal{A}/\mathcal{S} est abélienne.
3. Il y a un foncteur canonique $\mathcal{Q}_{\mathcal{S}} : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}/\mathcal{S}$ qui associe un objet dans \mathcal{A} à lui même et une flèche à celle qu'elle représente. Ce foncteur est exact.
4. Soit $f \in \text{Hom}_{\mathcal{A}}(A, B)$.
 - (a) $\mathcal{Q}_{\mathcal{S}}(f) = 0$ si et seulement si $\text{Im}(f) \in \mathcal{S}$.
 - (b) $\mathcal{Q}_{\mathcal{S}}(f)$ est un monomorphisme si et seulement si $\text{Ker}(f) \in \mathcal{S}$.
 - (c) $\mathcal{Q}_{\mathcal{S}}(f)$ est un épimorphisme si et seulement si $\text{Im}(f) \in \mathcal{S}$.

Proposition 1.2.2.2 ([Gab62, III.1, corollaire 1]). *Soit \mathcal{S} une sous-catégorie épaisse de \mathcal{A} et*

$$0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0$$

une suite exacte dans \mathcal{A}/\mathcal{S} . Cette suite est alors l'image par $\mathcal{Q}_{\mathcal{S}}$ d'une suite exacte courte dans $\mathcal{A} : 0 \rightarrow A_1 \rightarrow B_1 \rightarrow C_1 \rightarrow 0$. De plus, le diagramme suivant est commutatif.

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & A & \xrightarrow{\varphi_1} & B & \xrightarrow{\varphi_2} & C & \longrightarrow & 0 \\ & & \parallel & & \parallel & & \parallel & & \\ 0 & \longrightarrow & \mathcal{Q}_{\mathcal{S}}A_1 & \xrightarrow{\mathcal{Q}_{\mathcal{S}}\varphi_1} & \mathcal{Q}_{\mathcal{S}}B_1 & \xrightarrow{\mathcal{Q}_{\mathcal{S}}\varphi_2} & \mathcal{Q}_{\mathcal{S}}C_1 & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Proposition 1.2.2.3 ([Gab62, III.1, corollaire 2]). *La catégorie quotient \mathcal{A}/\mathcal{S} est universelle au sens suivant. Soit \mathcal{F} un foncteur de \mathcal{A} dans une autre catégorie abélienne \mathcal{C} qui annihile les objets dans \mathcal{S} . Il existe un seul foncteur $\mathcal{G} : \mathcal{A}/\mathcal{S} \rightarrow \mathcal{C}$ tel que $\mathcal{F} = \mathcal{G} \circ \mathcal{Q}_{\mathcal{S}}$.*

Sous les mêmes hypothèses que possède la proposition 1.2.1.5, on a le théorème suivant.

Théorème 1.2.2.4 ([Gab62]). *Le foncteur T se factorise à travers $\mathcal{A}/\text{Ker}(T)$:*

$$\mathcal{Q}_{\mathcal{S}} : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}/\text{Ker}(T).$$

De plus, cela donne une équivalence entre la catégorie $\mathcal{A}/\text{Ker}(T)$ et la catégorie \mathcal{B} .

Corollaire 1.2.2.5 ([Gab62]). *Soit $H : \mathcal{A}/\mathcal{S} \rightarrow \mathcal{D}$ un foncteur entre deux catégories abéliennes. Le foncteur H est exact si et seulement si $H \circ \mathcal{Q}_{\mathcal{S}}$ est exact.*

1.2.2.2 Le noyau du foncteur f'

Comme f' est défini via le foncteur de Lannes, on peut détailler la description de $\text{Ker}(f')$.

Proposition-Définition 1.2.2.6 ([LS89]). *Soit M un module instable. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

1. $f'(M) = 0$;
2. $\text{Hom}_{\mathcal{U}}(M, H^*BV) = 0$ pour tout p -groupe abélien élémentaire ;
3. Pour tout $x \in M$, il existe un entier n_x tel que $Sq_0^{n_x}x = 0$ pour $p = 2$ et $P_0^{n_x}x = 0$ pour $p > 2$.

Le module M est dit nilpotent ou 1-nilpotent s'il vérifie l'une des conditions équivalentes ci-dessus. On désigne par Nil (ou Nil_1) la sous-catégorie pleine de \mathcal{U} des modules nilpotents.

Si $M = H^*X$ où X est un espace topologique,

$$Sq_0^n x = x^{2^n} \text{ pour tout } x \in M.$$

C'est pour cette raison qu'un élément x d'un module instable est dit nilpotent si il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $Sq_0^n x = 0$.

Théorème 1.2.2.7 ([HLS93, partie I, sections 4 et 6]). *Le foncteur f' se factorise à travers la catégorie \mathcal{U}/Nil*

$$\mathcal{Q}_{\text{Nil}} : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{U}/\text{Nil}$$

et ceci induit une équivalence de catégories :

$$\mathcal{U}/\text{Nil} \cong \mathcal{F}_\omega.$$

1.2.2.3 Sous-catégories localisantes

Définition 1.2.2.8 ([Gab62, III.2]). *Une sous-catégorie épaisse \mathcal{S} d'une catégorie abélienne \mathcal{A} est une sous-catégorie localisante si le foncteur $\mathcal{Q}_{\mathcal{S}} : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}/\mathcal{S}$ admet un adjoint à droite \mathcal{T} . Le foncteur $\mathcal{T} \circ \mathcal{Q}_{\mathcal{S}}$ est appelé foncteur localisation.*

Proposition-Définition 1.2.2.9 ([Gab62, III.2, lemme 1]). *Soit M un objet de \mathcal{A} . Les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. Pour tout morphisme $u : P \rightarrow Q$ tel que $\text{Ker}(u)$ et $\text{Coker}(u)$ appartiennent à \mathcal{S} ,

$$\text{Hom}_{\mathcal{A}}(u, M) : \text{Hom}_{\mathcal{A}}(Q, M) \xrightarrow{\sim} \text{Hom}_{\mathcal{A}}(P, M).$$

2. Tout sous-objet de M appartenant à \mathcal{S} est nul ; de plus, toute suite exacte

$$0 \rightarrow M \rightarrow N \rightarrow P \rightarrow 0$$

telle que P appartienne à \mathcal{S} , se scinde.

3. Pour tout objet P de \mathcal{A} , $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(P, M) \cong \text{Hom}_{\mathcal{A}}(\mathcal{Q}_{\mathcal{S}}P, \mathcal{Q}_{\mathcal{S}}M)$.

On dit dorénavant que l'objet M est \mathcal{S} –fermé si il satisfait aux conditions équivalentes ci-dessus.

Corollaire 1.2.2.10 ([LZ86]). *Un objet M de \mathcal{U} est Nil–fermé si et seulement si :*

1. $\mathrm{Hom}_{\mathcal{U}}(N, M) = 0$ pour tout $N \in \mathrm{Nil}$.
2. $\mathrm{Ext}_{\mathcal{U}}^1(N, M) = 0$ pour tout $N \in \mathrm{Nil}$.

En fait, dans la catégorie \mathcal{U} , il y a plusieurs façons pour caractériser un objet Nil–fermé :

Proposition 1.2.2.11. *Soit M un module instable. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

1. *Le module M est Nil–fermé.*
2. *Le morphisme $M \rightarrow \tilde{\Phi}M$, l'adjoint du morphisme $\lambda_M : \Phi M \rightarrow M$, est un isomorphisme.*
3. *Le module M admet une résolution injective :*

$$0 \rightarrow M \rightarrow I^0 \rightarrow I^1 \rightarrow \dots$$

telle que I^0 et I^1 sont réduits.

Définition 1.2.2.12. *Un objet M de \mathcal{A} est dit \mathcal{S} –réduit si $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(N, M) = 0$ pour tout $N \in \mathcal{S}$. Un module instable M est dit réduit au lieu de Nil–réduit.*

Lemme 1.2.2.13. *Pour tout objet $N \in \mathcal{A}/\mathcal{S}$, $\mathcal{T}N$ est \mathcal{S} –fermé.*

En fait, on peut caractériser tous les objets \mathcal{S} –fermés.

Proposition 1.2.2.14 ([Gab62]). *Un objet M de \mathcal{A} est \mathcal{S} –fermé si et seulement si le morphisme naturel $M \rightarrow \mathcal{T} \circ \mathcal{Q}_{\mathcal{S}}M$ est un isomorphisme.*

La définition de \mathcal{S} –fermé nous permet de comprendre quand \mathcal{S} est localisante.

Proposition 1.2.2.15 ([Gab62, III.2, proposition 4]). *Si \mathcal{S} est une sous-catégorie épaisse d'une catégorie abélienne \mathcal{A} , les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. *\mathcal{S} est une sous-catégorie localisante.*
2. *Tout objet $M \in \mathcal{A}$ contient un sous-objet qui est maximal parmi les sous-objets de M appartenant à \mathcal{S} ; de plus, si tout sous-objet de M appartenant à \mathcal{S} est nul, il existe un monomorphisme de M dans un objet \mathcal{S} –fermé.*

En particulier, Nil est une sous-catégorie localisante de \mathcal{U} .

1.3 La filtration de Krull de la catégorie \mathcal{U}

Le présent travail reprend le théorème

Théorème 1.3.2.11. *Un module instable M appartient à \mathcal{U}_n si et seulement si*

$$\bar{T}^{n+1}M = 0.$$

résolu par Schwartz, dont on trouvera sa preuve dans [Sch94, théorème 6.2.4]. Cette preuve invoque la théorie des représentations des groupes symétriques donc est assez technique. En fait, elle dépend de la description explicite des objets simples de la catégorie $\mathcal{U}/\mathcal{N}il$. On donne dans cette section une preuve élémentaire de ce théorème, qui ne dépend que de l'ingrédient disponible dans la catégorie \mathcal{U} . Cette démonstration ressemble à celle introduite dans [Kuh13, théorème 1.1] mais n'est pas identique.

On commence par rappeler la définition de la filtration de Krull de la catégorie \mathcal{U} , en fait d'une catégorie abélienne quelconque.

1.3.1 La filtration de Krull

1.3.1.1 La dimension de Krull d'une catégorie abélienne

On rappelle qu'une catégorie abélienne est localement finie si elle est localement noethérienne (voir [Gab62]) et tout objet est limite inductive d'objets de longueur finie.

Théorème 1.3.1.1 ([Gab62]). *Soit \mathcal{A} une catégorie abélienne. Il existe une filtration des sous-catégories localisantes que l'on appelle la filtration de Krull*

$$\mathcal{A}_0 \subset \mathcal{A}_1 \subset \mathcal{A}_2 \subset \dots \subset \mathcal{A}_n \subset \dots \subset \mathcal{A}$$

telles que les quotients $\mathcal{A}_{n+1}/\mathcal{A}_n$ soient des catégories localement finies.

La construction s'étend à tous les ordinaux et on note \mathcal{A}_ω la plus petite sous-catégorie localisante contenant toutes les sous-catégories \mathcal{A}_n . La catégorie \mathcal{A} ne coïncide pas avec la catégorie \mathcal{A}_ω en général.

1. Si $M \in \mathcal{A}_\omega$, la dimension de Krull de M est le plus petit ordinal N tel que $M \in \mathcal{A}_N$. Sinon, la dimension de Krull de M est $+\infty$.
2. Si \mathcal{A}_ω coïncide avec \mathcal{A} , le plus petit ordinal N tel que \mathcal{A}_ω soit égale à \mathcal{A} sera appelé la dimension de Krull de \mathcal{A} .

1.3.1.2 La filtration de Krull de la catégorie \mathcal{U}

Proposition 1.3.1.2 ([Gab62]). *Si \mathcal{S} est une sous-catégorie épaisse d'une catégorie localement noethérienne \mathcal{A} , les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. \mathcal{S} est une sous-catégorie localisante de \mathcal{A} .
2. La limite inductive d'un système inductif d'objets de \mathcal{S} appartient à \mathcal{S} .

On peut alors donner une description plus explicite de la filtration de Krull pour la catégorie \mathcal{U} . Gabriel l'a définie de la manière suivante. On désigne par $\kappa_0(\mathcal{A})$ la sous catégorie épaisse la plus petite qui contient tous les objets simples de \mathcal{A} et fermée par co-limite. On considère la catégorie quotient $\mathcal{A}/\kappa_0(\mathcal{A})$. La pré-image de $\kappa_0(\mathcal{A}/\kappa_0(\mathcal{A}))$ dans \mathcal{A} est noté $\kappa_1(\mathcal{A})$. Par récurrence, on obtient une filtration croissante des sous catégories épaisses de \mathcal{A} .

$$\kappa_0(\mathcal{A}) \subset \kappa_1(\mathcal{A}) \subset \dots \subset \kappa_n(\mathcal{A}) \subset \dots \subset \mathcal{A}.$$

Ceci résulte de l'analyse dessus et du fait que tous les modules instables sont co-limites des modules finiment engendrés.

Théorème 1.3.1.3 ([Sch94]). *La catégorie \mathcal{U}_ω coïncide avec la catégorie \mathcal{U} .*

Le lemme suivant est trivial mais essentiel pour la suite.

Lemme 1.3.1.4. *Soient \mathcal{A} une catégorie localement noethérienne et $\mathcal{S} \subset \mathcal{A}$ une sous-catégorie épaisse. Soit $M \in \mathcal{A}$, l'objet $\mathcal{Q}_{\mathcal{S}}(M)$ est simple dans \mathcal{A}/\mathcal{S} si et seulement si les sous-objets non triviaux de M dans la catégorie \mathcal{A} sont dans \mathcal{S} ou les quotients par les sous-objets considérés appartiennent à \mathcal{S} .*

Démonstration. Le lemme résulte du fait qu'un objet N de \mathcal{A} est envoyé sur l'élément zéro de \mathcal{A}/\mathcal{S} si et seulement si $N \in \mathcal{S}$. En effet, soit N un sous-objet de M . Comme M est simple dans \mathcal{A}/\mathcal{S} , soit $\mathcal{Q}_{\mathcal{S}}N = 0$, soit $\mathcal{Q}_{\mathcal{S}}N = \mathcal{Q}_{\mathcal{S}}M$. C'est équivalent à dire que soit $N \in \mathcal{S}$ soit $M/N \in \mathcal{S}$. \square

1.3.2 Le cas de \mathcal{U}

Soit M un module instable. On note $M^{\geq n}$ son sous-module des éléments de degré supérieur ou égal à n

$$(M^{\geq n})^m = \begin{cases} 0 & \text{si } m < n; \\ M^m & \text{si } m \geq n. \end{cases}$$

Le module instable M est filtré par ses sous-modules

$$M = M^{\geq 0} \supset M^{\geq 1} \supset \dots \supset M^{\geq l} \supset \dots$$

Il suit qu'un module M est simple si et seulement si il est de la forme $\Sigma^n \mathbb{F}_p$ pour un entier n . On considère la sous-catégorie épaisse la plus petite qui contient tous les objets simples et est stable par co-limite. On la note \mathcal{U}_0 . La proposition suivante donne la description des modules dans \mathcal{U}_0 .

Définition 1.3.2.1. *Un module est localement fini si tous ses sous-modules monogènes sont finis.*

Le lemme suivant découle de la définition des modules localement finis.

Lemme 1.3.2.2. *Un module à la fois localement fini et finiment engendré est fini.*

Proposition 1.3.2.3. *Un module instable appartient à \mathcal{U}_0 si et seulement si il est localement fini.*

Démonstration. La collection S_0 de tous les modules localement finis est fermée par les quotients, les sous-objets et extensions et forme donc une sous-catégorie épaisse. De plus, cette classe est fermée par co-limite. On constate que $\Sigma^n \mathbb{F}_p$ est localement fini pour tout n . Par définition de \mathcal{U}_0 on obtient l'inclusion $\mathcal{U}_0 \subset S_0$.

Il reste à démontrer que $S_0 \subset \mathcal{U}_0$. Remarquons que \mathcal{U}_0 est fermée par co-limite, il suffit de démontrer que tous les modules localement finis et finiment engendrés appartiennent à \mathcal{U}_0 .

Soit M un tel module. D'après le lemme 1.3.2.2, ce module est fini. On peut le filtrer par ses sous-modules :

$$M = M^{\geq 0} \supset M^{\geq 1} \supset \dots \supset M^{\geq l} \supset \dots$$

Comme M est fini, il existe n tel que $M^{\geq m} = 0$ pour tout $m \geq n$. Il s'ensuit que ce module appartient à \mathcal{U}_0 . \square

Théorème 1.3.2.4 ([LS89]). *Un module instable M appartient à \mathcal{U}_0 si et seulement si $\bar{T}M = 0$.*

Démonstration. Le foncteur \bar{T} est adjoint à gauche du foncteur $\tilde{H}^*B\mathbb{Z}/p \otimes -$. Il découle de l'injectivité du module $\tilde{H}^*B\mathbb{Z}/p$ que le foncteur \bar{T} est exact. Comme $\bar{T}\Sigma^n\mathbb{F}_p = 0$ on a

$$\mathcal{U}_0 \subset \left\{ M \in \mathcal{U} \mid \bar{T}M = 0 \right\}.$$

Soit M un module finiment engendré tel que $\bar{T}M = 0$. On peut l'inclure dans une somme directe finie de modules injectifs.

$$i : M \hookrightarrow \bigoplus_{\alpha} (\tilde{H}^*B\mathbb{Z}/p)^{\otimes i_{n\alpha}} \otimes J(n_{\alpha}).$$

Si il y a un élément $x \in M$ tel que $\mathcal{A}_p x$ soit infini alors il doit exister dans la somme directe ci-dessus un facteur

$$(\tilde{H}^*B\mathbb{Z}/p)^{\otimes i_n} \otimes J(n), i_n > 0,$$

tel que $p \circ i(x) \neq 0$ (p désignant la projection sur ce facteur). Cela signifie que

$$\begin{aligned} 0 \neq i_{\mathcal{A}_p x} \in \text{Hom}_{\mathcal{U}} \left(\mathcal{A}_p x, \tilde{H}^*B\mathbb{Z}/p^{\otimes i_n} \otimes J(n) \right) &= \text{Hom}_{\mathcal{U}} \left(\bar{T}^{i_n}(\mathcal{A}_p x), J(n) \right) \\ &= \left(\left(\bar{T}^{i_n}(\mathcal{A}_p x) \right)^n \right)^* \neq 0, \end{aligned}$$

$i_{\mathcal{A}_p x}$ notant l'inclusion $\mathcal{A}_p x \hookrightarrow B\mathbb{Z}/p^{\otimes i_n} \otimes J(n)$. Il en résulte que

$$\left(\bar{T}^{i_n}(\mathcal{A}_p x) \right)^n \neq 0.$$

Comme $\bar{T}^{i_n}(\mathcal{A}_p x) \subset \bar{T}^{i_n}(M)$, il suit que $\bar{T}^{i_n}(M) \neq 0$ et donc $\bar{T}M \neq 0$ d'où la contradiction. \square

Définition 1.3.2.5. *On note $\mathcal{U}'_n = \left\{ M \in \mathcal{U} \mid \bar{T}^{n+1}M = 0 \right\}$. On a alors une filtration croissante de la catégorie \mathcal{U} :*

$$\mathcal{U}'_0 \subset \mathcal{U}'_1 \subset \dots \subset \mathcal{U}'_n \subset \dots \subset \mathcal{U}.$$

On a besoin du lemme suivant pour avancer.

Lemme 1.3.2.6. *Soit N un module instable tel que $\Omega N = 0$. Alors N est concentré en degré 0.*

Démonstration. La suite exacte $\Phi N \rightarrow N \rightarrow \Sigma \Omega N$ implique que $\lambda_N : \Phi N \rightarrow N$ est une surjection. Parce que l'image de ΦN dans N est "décalée en degré", on peut démontrer le lemme par récurrence.

1. Pour tout premier p , $(\Phi N)^1 = 0$. Le module $(\Phi N)^1$ se surjecte sur N^1 donc N^1 est aussi trivial.

2. Supposons que $N^m = 0$ pour tout $m < k$. On montre que $N^k = 0$. En effet, N^k est l'image de $(\Phi N)^k$. Par la définition de ΦN et l'hypothèse de récurrence, $(\Phi N)^k$ est trivial d'où le résultat.

□

Lemme 1.3.2.7. *Les sous-catégories \mathcal{U}'_n sont épaisses et stables par co-limite*

Démonstration. Le lemme découle de l'exactitude et de la commutativité avec la co-limite du foncteur de Lannes. □

Dans tout ce qui suit de cette section, on peut se restreindre à ne considérer que des modules finiment engendrés, puisqu'on travaille sur des classes stables par co-limite. Le reste de cette section est consacré à la nouvelle preuve du théorème 1.3.2.11. On démontrera par récurrence. En premier lieu, on montrera que $\mathcal{U}'_n \subset \mathcal{U}_n$ sous l'hypothèse que $\mathcal{U}'_k = \mathcal{U}_k$ pour tout $k < n$ (voir le lemme 1.3.2.8). En deuxième lieu, sous même l'hypothèse, on vérifiera que $\mathcal{U}_n \subset \mathcal{U}'_n$ (lemme 1.3.2.9). En conclusion, on obtient $\mathcal{U}'_n = \mathcal{U}_n$ pour tout $n \geq 0$ (théorème 1.3.2.10).

Lemme 1.3.2.8. *Supposons qu'on a $\mathcal{U}_k = \mathcal{U}'_k$ pour tout $k < n$ alors $\mathcal{U}'_n \subset \mathcal{U}_n$.*

Démonstration. Soit M un module instable finiment engendré dans \mathcal{U}'_n . Par définition de \mathcal{U}'_n on a

$$0 = \bar{T}^{n+1}M = \bar{T}(\bar{T}^n M).$$

Le module $\bar{T}^n M$ est donc localement fini. On peut supposer que $\bar{T}^n M$ est non trivial, sinon on se ramène au cas précédent. De plus $\bar{T}^n M$ est finiment engendré et localement fini donc il est fini. Considérons l'ensemble des sous-modules de $\bar{T}^n M$ de la forme $\bar{T}^n N$ pour $N \subset M$.

$$\mathcal{S} = \{ \bar{T}^n N \mid N \subset M \}.$$

Comme $\bar{T}^n M$ est fini on peut choisir M_0 dans M tel que $\bar{T}^n M_0$ soit non trivial et minimal pour l'inclusion dans \mathcal{S} .

Soit N un sous-module de M_0 on va montrer que si N n'appartient pas à \mathcal{U}_{n-1} alors M_0/N y appartient. En effet on a la suite exacte courte

$$0 \rightarrow \bar{T}^n N \rightarrow \bar{T}^n M_0 \rightarrow \bar{T}^n (M_0/N) \rightarrow 0.$$

Dans la mesure où $\bar{T}^n M_0$ est minimal, soit $\bar{T}^n N = 0$ soit $\bar{T}^n N = \bar{T}^n M_0$. Il s'ensuit que soit N soit M_0/N appartient à \mathcal{U}_{n-1} par hypothèse de récurrence, donc M_0 est simple dans $\mathcal{U}/\mathcal{U}_{n-1}$. Par définition M_0 est un objet de \mathcal{U}_n . On considère le quotient M/M_0 et en itérant la procédure, on obtient une suite croissante des sous-modules

$$M_0 \subset M_1 \subset \dots \subset M_m \subset \dots \subset M$$

telle que

$$M_0 \in \mathcal{U}_n, \quad M_i/M_{i-1} \in \mathcal{U}_n \text{ si } i \geq 1.$$

Alors, $M_m \in \mathcal{U}_n$ pour tout m . Parce que $\bar{T}^n M$ est fini, il existe k tel que $M = M_k$ d'où $M \in \mathcal{U}_n$. \square

Lemme 1.3.2.9. *Supposons qu'on a $\mathcal{U}_k = \mathcal{U}'_k$ pour tout $k < n$ alors $\mathcal{U}_n \subset \mathcal{U}'_n$.*

Démonstration. Soit $M \in \mathcal{U}_n$, il faut montrer que $\bar{T}^{n+1} M = 0$. La classe \mathcal{U}_n est engendrée par des représentants des objets simples de $\mathcal{U}/\mathcal{U}_{n-1}$ par extension, sous-objet, quotient et co-limite. Le foncteur \bar{T}^{n+1} commute avec ces opérations. Le cas général découle donc du cas des modules simples.

On considère dans la suite des représentants dans \mathcal{U} des objets simples de $\mathcal{U}/\mathcal{U}_{n-1}$.

Soit M un tel module. On considère l'épimorphisme φ_M dans la suite exacte

$$\Phi M \xrightarrow{\lambda_M} M \xrightarrow{\varphi_M} \Sigma \Omega M \rightarrow 0.$$

Comme M est simple, $\lambda_M(\Phi M)$ appartient à \mathcal{U}_{n-1} ou $\Sigma \Omega M$ y appartient. On a donc soit $\lambda_M(\Phi M)$ est simple, soit ΩM est simple dans $\mathcal{U}/\mathcal{U}_{n-1}$. Par hypothèse de récurrence, soit $\bar{T}^n \lambda_M(\Phi M) = 0$ soit $\bar{T}^n \Sigma \Omega M = 0$. Comme \bar{T}^n est exact, $\bar{T}^n(\varphi_M)$ est, soit un isomorphisme, soit un morphisme trivial. Il en résulte que soit $\bar{T}^n M \cong \bar{T}^n \Sigma \Omega M$, soit $\bar{T}^n \Sigma \Omega M = 0$.

On répète cette procédure. On note φ_k l'épimorphisme canonique

$$\Sigma^k \varphi_{\Omega^k M} : \Sigma^k \Omega^k M \twoheadrightarrow \Sigma^{k+1} \Omega^{k+1} M.$$

Alors $\varphi_M = \varphi_0$. On constate que chaque morphisme $\bar{T}^n(\varphi_i)$ est, soit un isomorphisme, soit un morphisme trivial. Bien plus, si $\bar{T}^n(\varphi_i) = 0$ alors $\bar{T}^n(\varphi_k) = 0$ pour tout $k > i$. On obtient le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccccccc} \bar{T}^n M & \xrightarrow{\varphi_0} & \bar{T}^n \Sigma \Omega M & \xrightarrow{\varphi_1} & \dots & \xrightarrow{\varphi_i} & \bar{T}^n \Sigma^{i+1} \Omega^{i+1} M \xrightarrow{\varphi_{i+1}} \dots \\ \parallel & & \parallel & & & & \parallel \\ \bar{T}^n M & \xrightarrow{\varphi_0} & \Sigma \bar{T}^n \Omega M & \xrightarrow{\varphi_1} & \dots & \xrightarrow{\varphi_i} & \Sigma^{i+1} \bar{T}^n \Omega^{i+1} M \xrightarrow{\varphi_{i+1}} \dots \end{array}$$

La limite de la suite $(\bar{T}^n \Sigma^k \Omega^k M, \bar{T}^n(\varphi_k))$ est 0 puisque la connectivité de $\bar{T}^n \Sigma^k \Omega^k M$ tend vers l'infini. Il en résulte qu'il existe un entier i tel que $\bar{T}^n(\varphi_k) = 0$ pour tout $k > i$ et que $\bar{T}^n(\varphi_k)$ soit un isomorphisme pour tout $k \leq i$. Alors $\bar{T}^n \Sigma^{i+1} \Omega^{i+1} M = 0$. Il s'ensuit que $\bar{T}^n \Omega^{i+1} M = 0$ et que $\bar{T}^{n+1} M \cong \bar{T}^n \Sigma^i \Omega^i M$. De plus, le foncteur \bar{T}^n commute avec Ω donc $\Omega \bar{T}^n \Omega^i M = 0$.

Il résulte du lemme 1.3.2.6 que $\bar{T}^n \Omega^i M$ est concentré en degré 0. Le module $\bar{T}^n \Sigma^i \Omega^i M$ est donc concentré en degré i . Alors

$$\bar{T}^{n+1} M \cong \bar{T}^{n+1} \Sigma^i \Omega^i M = \bar{T}(\bar{T}^n \Sigma^i \Omega^i M) = 0$$

d'où $M \in \mathcal{U}'_n$. \square

Théorème 1.3.2.10. *Les deux filtrations $\{\mathcal{U}_n\}$ et $\{\mathcal{U}'_n\}$ coïncident.*

Démonstration. Le théorème 1.3.2.4 démontre que $\mathcal{U}_0 = \mathcal{U}'_0$. On raisonne par récurrence. Supposons que $\mathcal{U}_k = \mathcal{U}'_k$ pour tout $k < n$. En joignant le lemme 1.3.2.8 avec le lemme 1.3.2.9, le

théorème en découle. \square

Le théorème 1.3.2.10 est reformulé comme suit.

Théorème 1.3.2.11. *Un module instable M appartient à \mathcal{U}_n ssi $\bar{T}^{n+1}M = 0$.*

Corollaire 1.3.2.12. *La filtration de Krull se comporte bien avec le produit tensoriel. Si $M \in \mathcal{U}_m$ et $N \in \mathcal{U}_n$, le module $M \otimes N \in \mathcal{U}_{m+n}$.*

1.4 La filtration nilpotente

Lionel Schwartz [Sch88] a donné la définition de la nilpotence pour les modules instables via l'action de l'algèbre de Steenrod. Ainsi il a défini la "nilpotence supérieure" pour les modules instables qui donne naissance à la filtration nilpotente pour la catégorie \mathcal{U} .

Les modules nilpotents ont été définis dans 1.2.2.6. Afin de généraliser cette définition, il faut qu'on ait la généralisation des opérateurs Sq_0 et P_0 .

Pour $p = 2$: $Sq_k : M^n \rightarrow M^{2n-k}$, $x \mapsto Sq^{n-k}x$;

Pour $p > 2$: $P_k : M^{2n+e} \rightarrow M^{2np+e+2l(p-1)}$, $x \mapsto P^{m-l}x$ avec $e \in \{0, 1\}$.

Définition 1.4.0.13 ([Sch88],[HLS95]). *Un module M instable est dit l -nilpotent si pour tout $x \in M$ il existe des entiers m_x tels que $Sq_i^{m_x}x = 0$ ($P_i^{m_x}x = 0$ pour p impair) pour $0 \leq i \leq l-1$.*

En fait, il y a plusieurs façons pour caractériser les modules l -nilpotents.

Proposition 1.4.0.14 ([Sch88],[Sch94]). *Le module instable M est l -nilpotent si et seulement si les conditions équivalentes ci-dessous sont vérifiées :*

1. M est co-limite de modules instables ayant une filtration finie dont les quotients sont l -suspensions ;
2. $\Omega^k M$ est nilpotent pour tout $0 \leq k \leq l-1$;
3. $\text{Hom}_{\mathcal{U}}(M, H^*BV \otimes N) = 0$ pour tout p -groupe abélien élémentaire V et tout N tel que $N^j = 0$ pour $j > l-1$;
4. $\text{Hom}_{\mathcal{U}}(M, H^*BV \otimes J(n)) = 0$ pour tout p -groupe abélien élémentaire V et pour tout $0 \leq n \leq l-1$;
5. $T_V M$ est $(l-1)$ -connexe ($(T_V M)^j = 0$ si $j < l$) pour tout p -groupe abélien élémentaire V .

Corollaire 1.4.0.15. *Soient M un module m -nilpotent et N un module n -nilpotent.*

1. Si $m \geq 1$, ΩM est $(m-1)$ -nilpotent ;
2. ΣM est $(m+1)$ -nilpotent.
3. $M \otimes N$ est $(m+n)$ -nilpotent.
4. $T_V M$ et $\bar{T}_V M$ sont m -nilpotents.

Exemple 1.4.0.16. 1. *Les modules instables l -connexes et bornés sont $(l+1)$ -nilpotents.*

2. *Les modules $\Sigma^n M$ sont n -nilpotents. De plus, si M est réduit*

$$\Sigma^n M \in \text{Nil}_n \setminus \text{Nil}_{n+1}.$$

On réfère à [Sch94] pour la suite.

Définition 1.4.0.17. On note Nil_l la sous-catégorie pleine de \mathcal{U} qui contient tous les modules l -nilpotents. On obtient une filtration décroissante des sous-catégories épaisses que l'on appelle la *filtration nilpotente* :

$$\mathcal{U} = \text{Nil}_0 \supset \text{Nil}_1 \supset \text{Nil}_2 \supset \dots \supset \text{Nil}_l \supset \dots$$

On note également Nil pour la sous-catégorie épaisse de tous les modules nilpotents.

Théorème 1.4.0.18. Le foncteur

$$\Sigma : \text{Nil}_{l-1} / \text{Nil}_l \rightarrow \text{Nil}_l / \text{Nil}_{l+1}$$

est une équivalence de catégories et a pour l'inverse le foncteur

$$\Omega : \text{Nil}_l / \text{Nil}_{l+1} \rightarrow \text{Nil}_{l-1} / \text{Nil}_l.$$

Proposition-Définition 1.4.0.19. Soit M un module instable. Il y a une filtration décroissante sur M

$$M = M_0 \supset M_1 \supset \dots \supset M_n \supset M_{n+1} \supset \dots$$

telle que :

1. $M_n \in \text{Nil}_n$ est le plus grand sous-module n -nilpotent contenu dans M .
2. Le quotient M_n / M_{n+1} est la n -ième suspension d'un module instable réduit que l'on note $R_n(M)$.
3. Si M est finiment engendré la filtration est finie.

Pour chaque module instable M on définit la fonction "introduite par Kuhn" $\omega_M : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \cup +\infty$ par la formule :

$$\omega_M(i) = \dim_{\text{Knull}} R_i(M).$$

Remarque 1.4.0.20. 1. La filtration de M est construite en prenant pour M_n le plus grand sous-module de M dans Nil_n .

2. Comme M_n est $(n-1)$ -connexe, $\bigcap_n M_n = 0$.

Proposition 1.4.0.21. Le foncteur T préserve les filtrations nilpotentes.

Démonstration. Le foncteur T est exact et commute avec la suspension. Alors si on se donne un module instable M avec sa filtration nilpotente

$$M = M_0 \supset M_1 \supset \dots \supset M_n \supset M_{n+1} \supset \dots$$

M_i appartenant à Nil_i , on a une filtration du module TM :

$$TM = T(M_0) \supset T(M_1) \supset \dots \supset T(M_n) \supset T(M_{n+1}) \supset \dots$$

On constate que $T(M_n) / T(M_{n+1}) \cong \Sigma^n T R_n(M)$. On démontre que cette filtration coïncide avec la filtration nilpotente de TM en raisonnant par récurrence.

1. Le module $T(M_1)$ est nilpotent donc $T(M_1) \subset (TM)_1$. Comme $(TM)_1 \subset T(M_0)$, le quotient $(TM)_1/T(M_1)$ est un sous-module de $T(M_0)/T(M_1) \cong TR_0(M)$ donc réduit. Mais par hypothèse il est nilpotent, donc il est trivial.
2. Supposons que $T(M_l) = (TM)_l$ pour $l \leq n-1$. On passe au cas $l = n$.

$$\begin{array}{ccccc}
 & (TM)_{n-1} & & & \\
 & \parallel & & & \\
 & \text{(par hypothèse de récurrence)} & & & \\
 T(M_n) \hookrightarrow & T(M_{n-1}) & \longrightarrow & \Sigma^{n-1} TR_{n-1} M & \\
 & \uparrow & & \uparrow & \\
 & (T(M_{n-1}))_n & \longrightarrow & (T(M_{n-1}))_n / T(M_n) & \xrightarrow{\sim} (TM)_n / T(M_n)
 \end{array}$$

Mais comme le module $(TM)_n/T(M_n)$ est n -nilpotent et se plonge dans la $(n-1)$ -suspension d'un module réduit, il est donc trivial. Le résultat suit. \square

1.5 Pseudo-hyper résolutions

Le foncteur suspension $\Sigma : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{U}$ est exact. Appliquant ce foncteur Σ sur la résolution injective d'un module instable M

$$0 \rightarrow M \rightarrow I^0 \rightarrow I^1 \rightarrow \dots \rightarrow I^{n-1} \rightarrow I^n \rightarrow \dots$$

on obtient la suite exacte :

$$0 \rightarrow \Sigma M \rightarrow \Sigma I^0 \rightarrow \Sigma I^1 \rightarrow \dots \rightarrow \Sigma I^{n-1} \rightarrow \Sigma I^n \rightarrow \dots$$

Cependant, le prix pour passer à la suspension est la perte de l'injectivité des modules de la suite donc on n'obtient qu'une suite exacte mais pas une résolution. Par contre, à l'aide de la suite exacte de Mahowald (voir Mahowald), on peut récupérer facilement une résolution injective d'une suspension d'un module injectif. En effet, la suspension d'un module injective est, soit injective, soit de dimension injective 1. On se trouve donc dans la même situation que celle dans la construction de hyper-résolution. Au lieu de couper la suite en suites exactes courtes, on concentre sur la résolution de chaque terme de la suite. En rassemblant toutes les suites ensemble, on obtient un faux complexe double. Plus exactement, on obtient un diagramme dans lequel chaque colonne est une suite exacte mais les lignes ne sont même plus des complexes. En utilisant l'injectivité des modules dans ce diagramme, on peut ajouter des morphismes pour que la suite total de ce diagramme soit un complexe. On appelle ce complexe *pseudo-hyper résolution*.

Notation 1.5.0.22. 1. Un morphisme $f : \bigoplus_{i=1}^n M_i \rightarrow \bigoplus_{j=1}^m N_j$ est représenté par une matrice $M_f = \{f_{ij}\} \in \text{Mat}(m, n)$, f_{ij} désignant le morphisme de M_j à N_i .

2. Soient $f : \bigoplus_{i=1}^n M_i \rightarrow \bigoplus_{j=1}^m N_j$ et $g : \bigoplus_{j=1}^m N_j \rightarrow \bigoplus_{i=1}^k K_i$ correspondant à M_f et M_g respectivement. La matrice du composé $g \circ f$ est le produit $M_g \cdot M_f$.

Le lemme suivant est facile mais efficace pour raffiner la construction.

Lemme 1.5.0.23. *Soit une suite*

$$E_1 \xrightarrow{f_1} E_2 \oplus M \xrightarrow{\begin{pmatrix} g_1 & g_2 \\ g_3 & id \end{pmatrix}} E_3 \oplus M \xrightarrow{f_3} E_4$$

qui est exacte aux termes $E_2 \oplus M$ et $E_3 \oplus M$. Posant $h_2 = g_1 + g_2 \circ g_3$, on obtient une suite

$$E_1 \xrightarrow{f_1} E_2 \xrightarrow{h_2} E_3 \xrightarrow{f_3} E_4$$

qui est exacte aux termes E_2 et E_3 .

Démonstration. On note $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ id \end{pmatrix}$, $\alpha_2 = \begin{pmatrix} g_2 \\ id \end{pmatrix}$. Chaque colonne du diagramme commutatif suivant est une suite exacte courte.

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & & 0 & & 0 & & 0 \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & M & \xrightarrow{id} & M & \longrightarrow & 0 \\
 \downarrow & & \downarrow \alpha_1 & & \downarrow \alpha_2 & & \downarrow \\
 E_1 & \xrightarrow{f_1} & E_2 \oplus M & \xrightarrow{f_2} & E_3 \oplus M & \xrightarrow{f_2} & E_4 \\
 \downarrow id & & \downarrow (id, 0) & & \downarrow (id, g_2) & & \downarrow id \\
 E_1 & \xrightarrow{f_1} & E_2 & \xrightarrow{h_2} & E_3 & \xrightarrow{f_3} & E_4 \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & & 0 & & 0 & & 0
 \end{array}$$

Compte tenu du fait que les deux premières suites sont exactes au milieu, il en est de même pour la troisième. \square

Le lemme suivant permet de construire les pseudo-hyper résolutions par récurrence.

Lemme 1.5.0.24. *Soit $0 \rightarrow M \rightarrow M^0 \rightarrow M^1 \rightarrow \dots \rightarrow M^{n-1} \rightarrow M^n \rightarrow \dots$ une suite exacte de modules instables. On note I^i l'enveloppe injective de M^i et α^i le morphisme $I^i \rightarrow J^i$, J^i désignant le quotient I^i / M^i . Il y a des morphismes*

$$\theta^i : I^i \rightarrow I^{i+1}, \quad \delta^i : J^{i-1} \rightarrow I^{i+1}, \quad \omega^i : J^{i-1} \rightarrow J^i,$$

tels que les morphismes $\partial^j = \begin{pmatrix} \theta^j & \delta^j \\ \alpha^j & \omega^j \end{pmatrix}$ rendent exacte la suite

$$0 \rightarrow M \rightarrow I^0 \xrightarrow{\partial^0} I^1 \bigoplus J^0 \xrightarrow{\partial^1} \dots \xrightarrow{\partial^t} I^{t+1} \bigoplus J^t \xrightarrow{\partial^{t+1}} \dots \quad (1.5.1)$$

Démonstration. L'existence des morphismes θ^j est évident dans la mesure où les modules I^j sont injectifs. Le composé $M^i \xrightarrow{f_i} I^i \xrightarrow{\theta^i} I^{i+1} \xrightarrow{\theta^{i+1}} I^{i+2}$ est nul du fait que $\theta^{i+1} \circ \theta^i = 0$. En passant au

quotient, on récupère le morphisme $\delta^i : J^{i-1} \rightarrow I^{i+1}$. De plus $J^i \cong I^i / M^i$ donc on obtient les morphismes $\omega^i : J^{i-1} \rightarrow J^i$. Le diagramme commutatif ci-dessous en résulte.

$$\begin{array}{ccccccc}
 M & \longrightarrow & M^0 & \longrightarrow & M^1 & \longrightarrow & \dots \longrightarrow M^{n-1} \longrightarrow \dots \\
 & & \downarrow f_0 & & \downarrow f_1 & & \downarrow f_{n-1} \\
 & & I^0 & \xrightarrow{\theta^0} & I^1 & \xrightarrow{\theta^1} & \dots \xrightarrow{\theta^{n-2}} I^{n-1} \longrightarrow \dots \\
 & & \downarrow \alpha^0 & & \downarrow \alpha^1 & & \downarrow \alpha^{n-1} \\
 & & J^0 & \xrightarrow{\omega^0} & J^1 & \xrightarrow{\omega^1} & \dots \xrightarrow{\omega^{n-2}} J^{n-1} \longrightarrow \dots
 \end{array}$$

On désigne par K^i la somme directe $I^i \oplus I^{i+1}$ et par H^i la somme directe $I^{i+1} \oplus J^i$ pour $i \geq 1$. On a un diagramme commutatif dont les lignes sont des complexes et les colonnes sont exactes :

$$\begin{array}{ccccccc}
 M & \longrightarrow & M^0 & \longrightarrow & M^1 & \longrightarrow & \dots \longrightarrow M^{n-1} \longrightarrow \dots \\
 & & \downarrow \tau^0 & & \downarrow \tau^1 & & \downarrow \tau^{n-1} \\
 & & I^0 & \xrightarrow{\beta^0} & K^1 & \xrightarrow{\beta^1} & \dots \xrightarrow{\beta^{n-2}} K^{n-1} \longrightarrow \dots \\
 & & \downarrow \chi^0 & & \downarrow \chi^1 & & \downarrow \chi^{n-1} \\
 & & J^0 & \xrightarrow{\gamma^0} & H^1 & \xrightarrow{\gamma^1} & \dots \xrightarrow{\gamma^{n-2}} H^{n-1} \longrightarrow \dots
 \end{array}$$

Les morphismes $\beta^i, \gamma^i, \tau^i, \chi^i$ désignent :

$$\begin{aligned}
 \beta^0 &= \begin{pmatrix} \theta^0 \\ \theta^1 \circ \theta^0 \end{pmatrix}, & \beta^i &= \begin{pmatrix} \theta^i & id \\ \theta^{i+1} \circ \theta^i & \theta^{i+1} \end{pmatrix} \text{ pour tout } i \geq 1, \\
 \gamma^0 &= \begin{pmatrix} \theta^0 \\ \omega^0 \end{pmatrix}, & \gamma^i &= \begin{pmatrix} \theta^{i+1} & \delta^i \\ \alpha^{i+1} & \omega^i \end{pmatrix} \text{ pour tout } i \geq 1 \\
 \tau^0 &= f_0, & \tau^i &= \begin{pmatrix} f_i \\ 0 \end{pmatrix} \text{ pour tout } i \geq 1, \\
 \chi^0 &= \alpha_0, & \chi^i &= \begin{pmatrix} 0 & id \\ \alpha_i & 0 \end{pmatrix} \text{ pour tout } i \geq 1,
 \end{aligned}$$

Par conséquent, la diagonale du complexe double :

$$\begin{array}{ccccccc}
 I^0 & \xrightarrow{\beta^0} & K^1 & \xrightarrow{\beta^1} & \dots & \xrightarrow{\beta^{n-2}} & K^{n-1} \\
 \downarrow \chi^0 & & \downarrow \chi^1 & & & & \downarrow \chi^{n-1} \\
 J^0 & \xrightarrow{\gamma^0} & H^1 & \xrightarrow{\gamma^1} & \dots & \xrightarrow{\gamma^{n-2}} & H^{n-1}
 \end{array}$$

est acyclique et M est sa première homologie. Notant $v^i = \begin{pmatrix} \beta^i & 0 \\ \chi^i & \gamma^{i-1} \end{pmatrix}$ on obtient la suite exacte

$$I^0 \xrightarrow{v^0} K^1 \oplus J^0 \xrightarrow{v^1} \dots \xrightarrow{v^{n-2}} (K^{n-1}) \oplus H^{n-2} \xrightarrow{v^{n-1}} \dots \quad (1.5.2)$$

Appliquant le lemme 1.5.0.23 sur 1.5.2 on obtient la suite 1.5.1. □

Proposition 1.5.0.25. Soit $0 \rightarrow M \rightarrow M^0 \rightarrow M^1 \rightarrow \dots \rightarrow M^{n-1} \rightarrow M^n \rightarrow \dots$ une suite exacte de modules instables. On note $(I^{i,t}, \partial^{i,t})_{0 \leq t \leq k}$ la résolution de M^i telle que $I^{i,t}$ soit injectif pour $0 \leq t < k$ et $I^{j,k}$ est le quotient $I^{j,k-1} / \text{Im}(\partial^{i,k-1})$. Il y a des morphismes

$$\partial_t^{i,j} : I^{i,j} \rightarrow I^{i+t+1,j-t}$$

tels que les morphismes

$$\partial^j = \begin{pmatrix} \partial^{0,j} & 0 & \dots & 0 \\ \partial_0^{0,j} & \partial^{1,j-1} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial_{j-1}^{0,j} & \partial_{j-1}^{1,j-1} & \dots & \partial^{j,0} \\ \partial_j^{0,j} & \partial_j^{1,j-2} & \dots & \partial_0^{j,0} \end{pmatrix}$$

soient les différentielles de la suite exacte

$$M \hookrightarrow I^{0,0} \xrightarrow{\partial^0} I^{0,1} \oplus I^{1,0} \xrightarrow{\partial^1} \dots \xrightarrow{\partial^j} \bigoplus_{m+n=j+1} I^{m,n} \xrightarrow{\partial^{j+1}} \dots$$

Démonstration. On raisonne par récurrence sur k . Le cas $k = 1$ a été démontré dans le lemme 1.5.0.24. On suppose que la proposition est vraie pour tout $k < q$. Passons au cas $k = q$. Notant $J^{i,q-1} = I^{i,q-2} / \text{Im}(\partial^{i,q-2})$, par hypothèse de récurrence on obtient la suite exacte :

$$M \hookrightarrow I^{0,0} \rightarrow I^{0,1} \oplus I^{1,0} \rightarrow \dots \rightarrow \left(\bigoplus_{\substack{m+n=j+1 \\ 0 \leq n < q-1}} I^{m,n} \right) \oplus J^{j-q+2,q-1} \rightarrow \dots$$

Par conséquent, obtient le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccccc} M \hookrightarrow & I^{0,0} & \longrightarrow & I^{0,1} \oplus I^{1,0} & \longrightarrow & \dots & \longrightarrow \left(\bigoplus_{\substack{m+n=j+1 \\ 0 \leq n < q-1}} I^{m,n} \right) \oplus J^{j-q+2,q-1} \longrightarrow \dots \\ & \downarrow & & \downarrow & & & \downarrow \\ & I^{0,0} & \longrightarrow & I^{0,1} \oplus I^{1,0} & \longrightarrow & \dots & \longrightarrow \left(\bigoplus_{\substack{m+n=j+1 \\ 0 \leq n < q-1}} I^{m,n} \right) \oplus J^{j-q+2,q-1} \longrightarrow \dots \\ & \downarrow & & \downarrow & & & \downarrow \\ & 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \dots & \longrightarrow I^{j-q+1,q} \longrightarrow \dots \end{array}$$

Compte tenu du lemme 1.5.0.24 on a la suite exacte :

$$M \hookrightarrow I^{0,0} \xrightarrow{\partial^0} I^{0,1} \oplus I^{1,0} \xrightarrow{\partial^1} \dots \xrightarrow{\partial^j} \bigoplus_{m+n=j+1} I^{m,n} \xrightarrow{\partial^{j+1}} \dots \quad (1.5.3)$$

La proposition suit. □

Remarquons que dans la suite exacte 1.5.3, les $k - 1$ premiers termes sont injectifs. Pour cette raison, si k tend vers l'infini on obtient la résolution injective de M :

Proposition 1.5.0.26. *Soit $0 \rightarrow M \rightarrow M^0 \rightarrow M^1 \rightarrow \dots \rightarrow M^{n-1} \rightarrow M^n \rightarrow \dots$ une suite exacte de modules instables. On note $(I^{i,\bullet}, \partial^{i,\bullet})$ la résolution injective de M^i . Il y a des morphismes*

$$\partial_t^{i,j} : I^{i,j} \rightarrow I^{i+t+1,j-t}$$

tels que les morphismes

$$\partial^j = \begin{pmatrix} \partial^{0,j} & 0 & \cdots & 0 \\ \partial_0^{0,j} & \partial^{1,j-1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial_{j-1}^{0,j} & \partial_{j-1}^{1,j-1} & \cdots & \partial^{j,0} \\ \partial_j^{0,j} & \partial_j^{1,j-2} & \cdots & \partial_0^{j,0} \end{pmatrix}$$

soient les différentielles de la suite exacte

$$M \hookrightarrow I^{0,0} \xrightarrow{\partial^0} I^{0,1} \bigoplus I^{1,0} \xrightarrow{\partial^1} \cdots \xrightarrow{\partial^j} \bigoplus_{m+n=j+1} I^{m,n} \xrightarrow{\partial^{j+1}} \cdots$$

On obtient donc une résolution injective qu'on l'appelle pseudo-hyper résolution injective de M .

Dualement on a des pseudo-hyper résolutions projectives.

Corollaire 1.5.0.27. Soit $\cdots \rightarrow N_m \rightarrow N_{m-1} \rightarrow \cdots \rightarrow N_1 \rightarrow N_0 \rightarrow N \rightarrow 0$ une suite exacte de modules instables. On note $(P_{i,\bullet}, \partial_{i,\bullet})$ la résolution projective de N_i . Il y a des morphismes

$$\partial_{i,j}^t : P_{i,j} \rightarrow P_{i-t-1,j+t}$$

tels que les morphismes

$$\partial_j = \begin{pmatrix} \partial_{0,j} & \partial_{1,j-1}^0 & \cdots & \partial_{j-1,1}^{j-2} & \partial_{j,0}^{j-1} \\ 0 & \partial_{1,j-1} & \cdots & \partial_{j-1,1}^{j-3} & \partial_{j,0}^{j-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \partial_{j-1,1} & \partial_{j,0}^0 \end{pmatrix}$$

soient les différentielles de la suite exacte

$$\cdots \xrightarrow{\partial_{j+2}} \bigoplus_{m+n=j+1} P_{m,n} \xrightarrow{\partial_{j+1}} \cdots \xrightarrow{\partial_2} P_{0,1} \bigoplus P_{1,0} \xrightarrow{\partial_1} P_{0,0} \rightarrow N \rightarrow 0.$$

On obtient donc une résolution projective que l'on appelle pseudo-hyper résolution projective de N .

Remarque 1.5.0.28. 1. La dimension projective d'un module instable M n'admet que deux valeurs possibles : 0 si M est projectif et $+\infty$ sinon.

2. Les pseudo-hyper résolutions ne sont pas naturelles. On en discutera en détails dans le chapitre 3 (voir 3.1.1.16).

CHAPITRE 2

Foncteurs polynomiaux stricts et modules instables

LES AUTEURS HENN, LANNES ET SCHWARTZ [HLS93] ont introduit le foncteur $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{F}$ grâce au foncteur de Lannes. Ainsi, les auteurs en ont déduit une équivalence de la catégorie \mathcal{U}/Nil vers la catégorie \mathcal{F}_ω de foncteurs analytiques. Le foncteur oubli $\mathcal{O} : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{F}$ de la catégorie des foncteurs polynomiaux stricts à la Friedlander-Suslin vers la catégorie \mathcal{F} est exact, fidèle mais pas pleinement fidèle. Hai, [Hai10] a construit un foncteur \bar{m} qui rend commutatif le diagramme

$$\begin{array}{ccc} & \mathcal{P} & \\ \bar{m} \swarrow & & \downarrow \mathcal{O} \\ \mathcal{U} & \xrightarrow{f} & \mathcal{F} \end{array}$$

On va démontrer dans ce chapitre que le foncteur de Hai permet de considérer la catégorie \mathcal{P}_d de foncteurs polynomiaux stricts homogènes de degrés d comme une sous catégorie pleine de la catégorie \mathcal{U} . Plus précisément on va montrer :

Théorème 2.2.1.1. *Le foncteur \bar{m}_d , restreint du foncteur \bar{m} au \mathcal{P}_d , est pleinement fidèle.*

Dans la suite on montrera le théorème 2.2.1.1 pour le cas $p = 2$. Le cas p impair sera traité dans un article avec Lê Minh Hà.

2.1 Foncteurs polynomiaux à la Friedlander-Suslin

On note $\mathcal{V}_{\mathbb{F}_p}$ la catégorie des \mathbb{F}_p –espaces vectoriels et $\mathcal{V}_{\mathbb{F}_p}^f$ sa sous catégorie pleine des espaces de dimension finie. Si p est précisé, on notera \mathcal{V} et \mathcal{V}^f au lieu de $\mathcal{V}_{\mathbb{F}_p}$ et $\mathcal{V}_{\mathbb{F}_p}^f$. On note ainsi \mathcal{V}^{gr} la catégorie des \mathbb{F}_p –espaces vectoriels gradués.

Soit G un groupe et $M \in \mathcal{V}$ un G –module. On définit

$$\begin{aligned} M^G &:= \{m \in M \mid gm = m, \forall g \in G\}, \\ M_G &:= M / \langle gm - m \mid g \in G \rangle. \end{aligned}$$

Pour tout espace V sur lequel G agit trivialement, il y a des isomorphismes naturels

$$\mathrm{Hom}_G(M, V) \cong \mathrm{Hom}_V(M_G, V), \quad \mathrm{Hom}_G(V, M) \cong \mathrm{Hom}_V(V, M^G).$$

Désignons par V^\sharp le dual linéaire $\mathrm{Hom}_V(V, \mathbb{F}_p)$ de V . Si V est un G -module alors V^\sharp l'est aussi via $(g\alpha)(m) := \alpha(g^{-1}m)$ pour tout $g \in G, m \in V$ et $\alpha \in V^\sharp$. De plus, on a $(V^\sharp)^G \cong (V_G)^\sharp$.

On donne une liste de foncteurs importants qui vont apparaître souvent dans la suite. Pour tout espace V on définit :

1. La n -ième puissance tensorielle $\otimes^n(V) := V^{\otimes n}$. Par convention, $\otimes^0(V) = \mathbb{F}_p$;
L'algèbre tensorielle $\otimes^*(V) := \bigoplus_{n \geq 0} \otimes^n(V)$.
2. La n -ième puissance divisée $\Gamma^n(V) := (\otimes^n(V))^{\mathfrak{S}_n}$;
L'algèbre à puissance divisée $\Gamma^*(V) := \bigoplus_{n \geq 0} \Gamma^n(V)$.
3. La n -ième puissance symétrique $S^n(V) := (\otimes^n(V))_{\mathfrak{S}_n}$;
L'algèbre à puissance symétrique $S^*(V) := \bigoplus_{n \geq 0} S^n(V)$.
4. La n -ième puissance extérieure

$$\Lambda^n(V) := \otimes^n(V) / \langle v_1 \otimes \cdots \otimes v_i \otimes v_i \otimes \cdots \otimes v_{n-1} | v_j \in V \rangle;$$

$$\text{L'algèbre extérieure } \Lambda^*(V) := \bigoplus_{n \geq 0} \Lambda^n(V).$$

Remarque 2.1.0.29. *Il y a des isomorphismes naturels :*

$$\begin{aligned} \Lambda^n(V^\sharp) &\cong (\Lambda^n V)^\sharp, & \Lambda^*(V \oplus W) &\cong \Lambda^*(V) \otimes \Lambda^*(W), \\ \Gamma^n(V^\sharp) &\cong (S^n V)^\sharp, & \Gamma^*(V \oplus W) &\cong \Gamma^*(V) \otimes \Gamma^*(W), \\ \otimes^n(V^\sharp) &\cong (\otimes^n V)^\sharp, & S^*(V \oplus W) &\cong S^*(V) \otimes S^*(W). \end{aligned}$$

2.1.1 Foncteurs polynomiaux

2.1.1.1 Foncteurs polynomiaux à la Friedlander-Suslin

Sur les corps infinis

Dans ce paragraphe on suppose que le corps de base \mathbb{k} est infini.

Définition 2.1.1.1. *Soient V et W deux \mathbb{k} -espaces vectoriels de dimension finie. Une application $p : V \rightarrow W$ est dite polynomiale si après avoir choisi les bases de V et W elle est représentée par m polynômes de n variables, m, n désignant $\dim_{\mathbb{k}} W$ et $\dim_{\mathbb{k}} V$ respectivement.*

On peut alors définir les foncteurs polynomiaux :

Définition 2.1.1.2 (Foncteur polynomial). *Un foncteur polynomial est un foncteur P de la catégorie $\mathcal{V}_{\mathbb{k}}^f$ à elle-même tel que pour tous espaces vectoriels $V, W \in \mathcal{V}_{\mathbb{k}}^f$ l'application*

$$P_{V,W} : \mathrm{Hom}_{\mathbb{k}}(V, W) \rightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{k}}(P(V), P(W)) \quad (\text{Poly})$$

est polynomiale.

Sur les corps finis

Si le corps \mathbb{k} est fini, une application $p : V \rightarrow W$ est toujours polynomiale au sens de 2.1.1.1. Donc on doit modifier cette définition pour le cas de corps finis.

Définition 2.1.1.3. Pour $V, W \in \mathcal{V}^f$ on note $\text{Hom}_{Pol}(V, W) := S^*(V^\#) \otimes W$. Les éléments de $\text{Hom}_{Pol}(V, W)$ sont appelés les applications polynomiales de V dans W . Une application est dite homogène de degré d si elle appartient à $\text{Hom}_{Pol}(V, W)$.

L'application $P_{V,W}$ (Poly) correspond à un élément dans

$$S^d(\text{Hom}_{\mathbb{k}}(V, W)^\#) \otimes \text{Hom}_{\mathbb{k}}(P(V), P(W))$$

que l'on note de nouveau $P_{V,W}$ par abus de notation. Comme P est un foncteur, les applications $P_{V,W}$ sont soumises à certaines conditions. On peut donc reformuler la définition 2.1.1.2 :

Définition 2.1.1.4 (Friedlander-Suslin). Un foncteur polynomial strict homogène de degré d à la Friedlander-Suslin $P : \mathcal{V}^f \rightarrow \mathcal{V}^f$ est une paire d'applications, la première associe à chaque espace vectoriel de dimension finie V l'espace $P(V) \in \mathcal{V}^f$ et la deuxième associe à chaque paire $(V, W) \in \mathcal{V}^f \times \mathcal{V}^f$ l'application polynomiale

$$P_{V,W} \in S^d(\text{Hom}_{\mathbb{k}}(V, W)^\#) \otimes \text{Hom}_{\mathbb{k}}(P(V), P(W))$$

soumise aux conditions provenant des propriétés du foncteur P :

1. $P_{V,V}(\text{id}_V) = \text{id}_{P(V)}$;
2. Pour tout $U, V, W \in \mathcal{V}^f$ le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}_{\mathbb{k}}(V, W) \times \text{Hom}_{\mathbb{k}}(U, V) & \longrightarrow & \text{Hom}_{\mathbb{k}}(U, W) \\ P_{V,W} \times P_{U,V} \downarrow & & \downarrow P_{U,W} \\ \text{Hom}_{\mathbb{k}}(P(V), P(W)) \times \text{Hom}_{\mathbb{k}}(P(U), P(V)) & \longrightarrow & \text{Hom}_{\mathbb{k}}(P(U), P(W)) \end{array}$$

Définition 2.1.1.5. Une transformation naturelle entre deux foncteurs polynomiaux stricts F, G est une collection d'applications linéaires $\psi_V : F(V) \rightarrow G(V)$ telles que le diagramme suivant commute

$$\begin{array}{ccc} F(V) & \xrightarrow{F_{V,W}(f)} & F(W) \\ \psi_V \downarrow & & \downarrow \psi_W \\ G(V) & \xrightarrow{G_{V,W}(f)} & G(W) \end{array}$$

Remarque 2.1.1.6. Compte tenu du fait que $U \otimes \text{Hom}_{\mathbb{k}}(V, W) \cong \text{Hom}_{\mathbb{k}}(U^\# \otimes V, W)$ pour tous $U, V, W \in \mathcal{V}^f$, une application polynomiale $P_{V,W} \in S^d(\text{Hom}_{\mathbb{k}}(V, W)^\#) \otimes \text{Hom}_{\mathbb{k}}(P(V), P(W))$ correspond à

$$\Gamma^d(\text{Hom}_{\mathbb{k}}(V, W)) \cong S^d(\text{Hom}_{\mathbb{k}}(V, W)^\#)^\# \rightarrow \text{Hom}_{\mathbb{k}}(P(V), P(W)).$$

Cela nous donne la définition de foncteur polynomial à la Bousfield que l'on détaille dans le paragraphe suivant.

Foncteurs polynomiaux à la Bousfield

La catégorie $\Gamma^d \mathcal{V}^f$

Pour tout $V \in \mathcal{V}$ il y a une application non linéaire $\gamma^d : V \rightarrow \Gamma^d(V)$, définie par : $\gamma^d(x) = x^{\otimes d}$. De plus pour tous espaces vectoriels V et W il y a une seule application linéaire

$$\mu : \Gamma^d(V) \otimes \Gamma^d(W) \rightarrow \Gamma^d(V \otimes W)$$

satisfaisant à la condition $\mu(\gamma^d(x) \otimes \gamma^d(y)) = \gamma^d(x \otimes y)$. D'après [FS97] on définit la catégorie $\Gamma^d \mathcal{V}^f$ comme suit.

$$\text{Ob}(\Gamma^d \mathcal{V}^f) = \text{Ob}(\mathcal{V}^f), \quad \text{Hom}_{\Gamma^d \mathcal{V}^f}(V, W) = \Gamma^d(\text{Hom}_{\mathcal{V}^f}(V, W)).$$

L'identité dans $\Gamma^d \mathcal{V}^f$ correspondant à un objet V est $\gamma^d(1_V)$. Le composé dans \mathcal{V}^f et la transformation μ déterminent la loi de composition dans $\Gamma^d \mathcal{V}^f$

$$\begin{array}{ccc} \Gamma^d(\text{Hom}_{\mathcal{V}^f}(V, W)) \otimes \Gamma^d(\text{Hom}_{\mathcal{V}^f}(U, V)) & \xrightarrow{\mu} & \Gamma^d(\text{Hom}_{\mathcal{V}^f}(V, W)) \otimes \text{Hom}_{\mathcal{V}^f}(U, V) \\ & \searrow \circ & \downarrow \\ & & \Gamma^d(\text{Hom}_{\mathcal{V}^f}(U, W)) \end{array}$$

La catégorie $\Gamma^d \mathcal{V}^f$ est une catégorie \mathbb{F}_p -linéaire, il s'agit d'une catégorie dont l'ensemble des morphismes entre deux objets admettant une structure de \mathbb{F}_p -espace vectoriel et la composition est bi-linéaire.

Définition 2.1.1.7 (Bousfield). *Un foncteur polynomial strict homogène de degré d est un foncteur \mathbb{F}_p -linéaire L de $\Gamma^d \mathcal{V}^f$ vers \mathcal{V}^f . Désignons par \mathcal{P}_d la catégorie de tous ces foncteurs. On note $\mathcal{P} := \bigoplus_{d \geq 0} \mathcal{P}_d$. Un objet de \mathcal{P} est appelé foncteur polynomial strict.*

2.1.2 Opérations binaires de foncteurs polynomiaux stricts

1. La composition

$$\begin{aligned} - \circ - : \mathcal{P}_n \times \mathcal{P}_m &\rightarrow \mathcal{P}_{nm} \\ (F, G) &\mapsto F \circ G. \end{aligned}$$

Le morphisme structural est défini par :

$$\begin{array}{ccc} \Gamma^{nm}(\text{Hom}_{\mathcal{V}^f}(V, W)) & \xrightarrow{\Gamma^{nm}(F \circ G)} & \text{Hom}_{\mathcal{V}^f}(F \circ G(V), F \circ G(W)) \\ \Gamma^{nm} \rightarrow \Gamma^n \circ \Gamma^m \downarrow & & \uparrow \Gamma^n(F) \\ \Gamma^n \circ \Gamma^m(\text{Hom}_{\mathcal{V}^f}(V, W)) & \xrightarrow{\Gamma^n(\Gamma^m(G))} & \Gamma^n(\text{Hom}_{\mathcal{V}^f}(G(V), G(W))) \end{array}$$

2. Le produit tensoriel

$$\begin{aligned} - \otimes - : \mathcal{P}_n \times \mathcal{P}_m &\rightarrow \mathcal{P}_{n+m} \\ (F, G) &\mapsto F \otimes G. \end{aligned}$$

Le morphisme structural est défini par :

$$\begin{array}{ccc} \Gamma^{n+m}(\mathrm{Hom}_{\mathcal{V}^f}(V, W)) & \xrightarrow{\Gamma^{n+m}(F \otimes G)} & \mathrm{Hom}_{\mathcal{V}^f}(F \otimes G(V), F \otimes G(W)) \\ \downarrow \Gamma^{n+m} \rightarrow \Gamma^n \otimes \Gamma^m & & \uparrow \\ \Gamma^n \otimes \Gamma^m(\mathrm{Hom}_{\mathcal{V}^f}(V, W)) & \xrightarrow{\Gamma^n(F) \otimes \Gamma^m(G)} & \mathrm{Hom}_{\mathcal{V}^f}(F(V), F(W)) \otimes \mathrm{Hom}_{\mathcal{V}^f}(G(V), G(W)) \end{array}$$

3. La torsion de Frobenius de l'identité, désignée par $I^{(1)}$, est le foncteur qui associe à chaque espace vectoriel V l'espace vectoriel V , muni de l'application structurale induite par la Verschiebung :

$$\Gamma^p(\mathrm{Hom}(V, W)) \longrightarrow \mathrm{Hom}(V^{(1)}, W^{(1)}).$$

Cela fait de $I^{(1)}$ un foncteur polynomial strict homogène de degré p .

Pour tout $F \in \mathcal{P}_d$ on note $F^{(1)} = F \circ I^{(1)}$ et récursivement on définit

$$F^{(r+1)} = (F^{(r)})^{(1)}.$$

Remarque 2.1.2.1. Pour le cas $\mathbb{k} = \mathbb{F}_p$, le morphisme de Frobenius $f : \mathbb{F}_p \rightarrow \mathbb{F}_p, \lambda \mapsto \lambda^p$ est le morphisme identité. On a donc $V = V^{(1)}$. Cependant, les foncteurs I et $I^{(1)}$ sont différents à cause de la structure polynomiale. Bien que les valeurs $\lambda = \lambda^p$, les polynômes $f(x) = x^p$ et $g(x) = x$ sont distincts. En fait, le morphisme structural de $I^{(1)}$ est défini par les formules :

$$\begin{array}{ccc} \Gamma^p(V) & \xrightarrow{f} & \Gamma^p(W) \\ \uparrow i & & \downarrow \varphi \\ V^{(1)} & \xrightarrow{I^{(1)}(f)} & W^{(1)} \end{array}$$

où φ est le Verschiebung¹ et i est défini par $v_i \mapsto v_i^{\otimes p}$ sur une base $\{v_i\}$ de V .

On remarque que la donnée d'un foncteur $F \in \mathcal{F}$ est la donnée d'un espace vectoriel $F(V)$ pour tout $V \in \mathcal{V}^f$ avec le morphisme structural $\mathrm{Hom}(V, W) \rightarrow \mathrm{Hom}(F(V), F(W))$. Donc dans $\mathcal{F} = \mathcal{F}(\mathbb{F}_p)$, les foncteurs I et $I^{(1)}$ sont égaux.

Proposition 2.1.2.2 ([FS97]). La catégorie \mathcal{P}_d possède suffisamment d'objets projectifs et injectifs. Pour tout $W \in \mathcal{V}^f$, soit $\Gamma^{d,W}$ le foncteur défini par $\Gamma^{d,W}(V) = \Gamma^d(\mathrm{Hom}_{\mathcal{V}^f}(W, V))$. Il y a un isomorphisme

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{P}}(\Gamma^{d,W}, G) \cong G(W).$$

Le foncteur $\Gamma^{d,W}$ est donc un objet projectif dans \mathcal{P}_d .

De plus dès que $\dim W \geq d$, $\Gamma^{d,W}$ est un générateur projectif de \mathcal{P}_d .

1. Le Verschiebung $\Gamma^p(W) \rightarrow W^{(1)}$ est le dual du morphisme de Frobenius $W^{(1)} \rightarrow S^p(W), x^{(1)} \mapsto x^p$.

Dualement le foncteur $S^{d,W}$ qui associe $V \in \mathcal{V}^f$ à $S^d(W^\# \otimes V)$ est un co-générateur injectif de \mathcal{P}_d dès que $\dim W \geq d$.

Plus précisément dans le cas des objets projectifs, soit Γ^λ le foncteur $V \mapsto (V^{\otimes d})^{\mathfrak{S}_\lambda}$, \mathfrak{S}_λ notant le sous-groupe de Young $\mathfrak{S}_\lambda := \mathfrak{S}_{\lambda_1} \times \cdots \times \mathfrak{S}_{\lambda_n}$. Il est isomorphe au produit tensoriel $\Gamma^{\lambda_1} \otimes \cdots \otimes \Gamma^{\lambda_n}$. Ces foncteurs Γ^λ , avec $|\lambda| = \lambda_1 + \cdots + \lambda_n = d$, forment un système de générateurs projectifs de \mathcal{P}_d .

2.2 Le foncteur de Hai

Le foncteur $\bar{m}_d: \mathcal{P}_d \rightarrow \mathcal{U}$ est défini comme suit. Soit $F \in \mathcal{P}_d$, $\bar{m}_d(F)^e$ (le e -ième degré du module) est l'espace vectoriel de transformations naturelles de $\bar{\Gamma}^{d,e}$ dans F :

$$\bar{\Gamma}^{d,e} := \bigoplus_{\substack{|\lambda|=d \\ ||\lambda||=e}} \Gamma^\lambda, \quad \bar{m}_d(F)^e := \text{Hom}_{\mathcal{P}_d}(\bar{\Gamma}^{d,e}, F),$$

la somme parcourt l'ensemble des partitions telles que

$$|\lambda| := \lambda_1 + \cdots + \lambda_n = d, \quad ||\lambda|| := \lambda_1 + 2\lambda_2 + \cdots + 2^{n-1}\lambda_n = e.$$

Les morphismes structuraux sont induits par $\text{Hom}_{\mathcal{P}_d}(\bar{\Gamma}^{d,e}, -)$. Autrement dit, le foncteur \bar{m}_d peut se voir comme l'évaluation sur $F(1)$:

$$\bar{m}_d(G) \cong G(F(1)) \text{ pour tout } G \in \mathcal{P}_d.$$

dont les morphismes structuraux sont

$$(\bar{m}_d)_{V,W} : \text{Hom}_{\mathcal{P}_d}(F_1, F_2) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{U}}(\bar{m}_d(F_1), \bar{m}_d(F_2)) \cong \text{Hom}_{\mathcal{U}}(F_1(F(1)), F_2(F(1)))$$

$$f \mapsto f(F(1)).$$

Le foncteur \bar{m} possède de bonnes propriétés.

Théorème 2.2.0.3 ([Hai10, sections 3 et 4]). *Le foncteur \bar{m} est exact. Il commute avec produits tensoriels et torsions de Frobenius.*

Corollaire 2.2.0.4. *Pour tout foncteur G de degré d considéré dans les exemples précédents (puissances divisées, puissances symétriques,...) le module $\bar{m}_d(G)$ est isomorphe à $G(F(1))$ avec la graduation déterminée par le produit tensoriel et l'action de l'algèbre de Steenrod par la formule de Cartan. Pour le cas de torsion de Frobenius $\bar{m}_p(I^{(1)}) \cong \Phi(F(1))$.*

Il résulte de ces propriétés du foncteur \bar{m} et du fait que la catégorie \mathcal{P}_d possède suffisamment d'objets injectifs et projectifs qu'on peut construire des adjoints à gauche et à droite de \bar{m} .

Théorème 2.2.0.5. *Le foncteur \bar{m} admet un adjoint à gauche ainsi qu'un adjoint à droite désignés par l et r respectivement. Ils sont définis comme suit. Pour tout module $M \in \mathcal{U}$ et tout espace vectoriel $V \in \mathcal{V}^f$ on a*

$$r(M)(V) := \text{Hom}_{\mathcal{U}}(\Gamma^{d,V}(F(1)), M),$$

$$l(M)(V) := \text{Hom}_{\mathcal{U}} \left(M, S^{d,V}(F(1))^{\#} \right).$$

Démonstration. On démontre que r est l'adjoint à droite de \bar{m} . *Mutatis mutandis*, on obtient la vérification pour l . Par définition du foncteur r on a

$$\begin{aligned} \text{Hom}_{\mathcal{U}} \left(\bar{m}(\Gamma^{d,V}), M \right) &\cong \text{Hom}_{\mathcal{U}} \left(\Gamma^{d,V}(F(1)), M \right) \\ &= r(M)(V) \\ &\cong \text{Hom}_{\mathcal{P}_d} \left(\Gamma^{d,V}, r(M) \right). \end{aligned}$$

Le dernier isomorphisme dépend de 2.1.2.2. Or les isomorphismes

$$\text{Hom}_{\mathcal{U}} \left(\bar{m}(\Gamma^{d,V}), M \right) \cong \text{Hom}_{\mathcal{P}_d} \left(\Gamma^{d,V}, r(M) \right)$$

ont lieu pour tous les foncteurs $\Gamma^{d,V}$. Parce que les foncteurs $\Gamma^{d,V}$ forment un système de générateurs projectifs pour \mathcal{P}_d dès que $\dim V \geq d$, pour tout foncteur $G \in \mathcal{P}_d$ on obtient des suites exactes

$$\bigoplus_{\alpha} \Gamma^{d,V_{\alpha}} \rightarrow \bigoplus_{\omega} \Gamma^{d,V_{\omega}} \rightarrow G \rightarrow 0$$

Il résulte de l'exactitude de \bar{m} que la suite suivante est exacte.

$$\bigoplus_{\alpha} \Gamma^{d,V_{\alpha}}(F(1)) \rightarrow \bigoplus_{\omega} \Gamma^{d,V_{\omega}}(F(1)) \rightarrow \bar{m}_d(G) \rightarrow 0.$$

Dans la mesure où les foncteurs $\text{Hom}_{\mathcal{U}}(-, M)$ et $\text{Hom}_{\mathcal{P}_d}(-, r(M))$ sont exacts à droite et commutent avec les sommes directes finies, l'isomorphisme naturel suivant a lieu.

$$\text{Hom}_{\mathcal{U}}(\bar{m}(G), M) \cong \text{Hom}_{\mathcal{P}_d}(G, r(M)).$$

On en déduit que r est l'adjoint à droite de \bar{m} . □

On peut maintenant énoncer le résultat principal.

2.2.1 Théorèmes principaux

Théorème 2.2.1.1. *Pour $p = 2$, le foncteur \bar{m}_d est pleinement fidèle.*

Théorème 2.2.1.2. *Les compositions $l \circ \bar{m}$ et $r \circ \bar{m}$ sont l'identité.*

Le théorème 2.2.1.2 est en fait un corollaire du théorème 2.2.1.1. Supposons que le foncteur \bar{m}_d est pleinement fidèle, alors

$$\text{Hom}_{\mathcal{P}_d}(F_1, F_2) \cong \text{Hom}_{\mathcal{U}}(\bar{m}_d(F_1), \bar{m}_d(F_2)).$$

pour tous foncteurs F_1, F_2 . Par ailleurs, les isomorphismes

$$\text{Hom}_{\mathcal{U}}(\bar{m}_d(F_1), \bar{m}_d(F_2)) \cong \text{Hom}_{\mathcal{P}_d}(F_1, r_d \circ \bar{m}_d(F_2))$$

ont lieu. Il s'ensuit qu'on a

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{P}_d}(F_1, F_2) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{P}_d}(F_1, r_d \circ \bar{m}_d(F_2)).$$

pour tous foncteurs F_1, F_2 . Il en découle que $r_d \circ \bar{m}_d(F_2) \cong F_2$ pour tout $F_2 \in \mathcal{P}_d$. C'est pour cette raison qu'il suffit de justifier la preuve pour le théorème 2.2.1.1.

Remarque 2.2.1.3. *Le théorème 2.2.1.1 permet de voir la catégorie \mathcal{P}_d comme une sous-catégorie pleine de \mathcal{U} . Cependant :*

1. *La catégorie \mathcal{P}_d n'est pas une sous-catégorie épaisse de \mathcal{U} . En effet, il résulte de la résolution projective² de $\Phi F(1)$ qu'on a*

$$\mathrm{Ext}_{\mathcal{U}}^i(\Phi F(1), \Phi F(1)) \cong \begin{cases} \mathbb{F}_2 & \text{si } i = 2^n - 2, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Par contre, on a

$$\mathrm{Ext}_{\mathcal{P}_2}^i(I^{(1)}, I^{(1)}) \cong \begin{cases} \mathbb{F}_2 & \text{si } i = 0, 2 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Par ailleurs, $\bar{m}_d(I^{(1)}) = \Phi F(1)$ donc on a

$$\mathrm{Ext}_{\mathcal{P}_2}^i(I^{(1)}, I^{(1)}) \not\cong \mathrm{Ext}_{\mathcal{U}}^i(\bar{m}_d(I^{(1)}), \bar{m}_d(I^{(1)})) \text{ pour } i = 2^n - 2, n \geq 3.$$

2. *La catégorie \mathcal{P} , en tant que la somme directe $\bigoplus_{d \geq 0} \mathcal{P}_d$, n'est pas une sous-catégorie pleine de \mathcal{U} . En effet, dans la catégorie \mathcal{P} on a :*

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{P}}(\Gamma^2, \Gamma^1) = 0.$$

Toutefois :

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_{\mathcal{U}}(\bar{m}(\Gamma^2), \bar{m}(\Gamma^1)) &\cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{U}}(F(2), F(1)) \\ &\cong (F(1))^2 \\ &\cong \mathbb{F}_2. \end{aligned}$$

Il s'ensuit que

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{P}}(\Gamma^2, \Gamma^1) \not\cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{U}}(\bar{m}(\Gamma^2), \bar{m}(\Gamma^1)).$$

2.3 Démonstration des théorèmes principaux

La preuve du théorème 2.2.1.1 est faite dans les sous-sections suivantes. La première énonce et démontre des lemmes techniques. Le lemme clé est démontré dans la deuxième et on conclut dans la dernière.

². Voir le corollaire 1.1.4.17, page 26.

On commence par expliquer la stratégie pour attaquer le problème. Afin de démontrer la fidélité pleine du foncteur \bar{m}_d , il faut qu'on montre que

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{U}}\left(\Gamma^\lambda(F(1)), S^d(V \otimes F(1))\right) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{P}}\left(\Gamma^\lambda, S^{d,V}\right),$$

λ désignant une suite d'entiers strictement positifs dont la somme vaut d . Le second membre, par définition, n'est rien d'autre que $S^{\lambda_1}(V) \otimes \cdots \otimes S^{\lambda_t}(V)$ (voir 2.1.2.2). On établit d'abord le premier lemme à démontrer.

Lemme 2.3.0.4. *Soit $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_k)$ une suite d'entiers strictement positifs dont la somme vaut d . La transformation $S^n \otimes S^m \rightarrow S^{n+m}$ induit une transformation naturelle*

$$\bigotimes_{j=1}^k S^{\lambda_j} \rightarrow S^d.$$

Le composé $\psi \circ \rho$ est donc un isomorphisme, φ et ψ désignant

$$\begin{aligned} \rho : \bigotimes_{j=1}^k S^{\lambda_j}(V) &\cong \bigotimes_{j=1}^k \mathrm{Hom}_{\mathcal{U}}\left(F(\lambda_j), S^{\lambda_j}(F(1) \otimes V)\right) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{U}}\left(F(\lambda), \bigotimes_{j=1}^k S^{\lambda_j}(F(1) \otimes V)\right), \\ \psi : \mathrm{Hom}_{\mathcal{U}}\left(F(\lambda), \bigotimes_{j=1}^k S^{\lambda_j}(F(1) \otimes V)\right) &\longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{U}}\left(F(\lambda), S^d(F(1) \otimes V)\right). \end{aligned}$$

Notation 2.3.0.5. *Soit $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_k)$ une suite d'entiers. On note :*

$$\begin{aligned} F(\lambda) &= F(\lambda_1) \otimes \cdots \otimes F(\lambda_k), \\ S^\lambda &= S^{\lambda_1} \otimes \cdots \otimes S^{\lambda_k}, \\ \Lambda^\lambda &= \Lambda^{\lambda_1} \otimes \cdots \otimes \Lambda^{\lambda_k}. \end{aligned}$$

On remarque que les morphismes ρ et $\bigotimes_{j=1}^k S^{\lambda_j}(F(1) \otimes V) \rightarrow S^d(F(1) \otimes V)$ sont injectifs donc le composé $\psi \circ \rho$ l'est aussi. On observe ainsi que le produit tensoriel $F(\lambda)$ est finiment engendré et que le module $S^d(F(1) \otimes V)$ est *Nil*-fermé. En effet, ce module possède une propriété plus intéressante. Il est monogène modulo nilpotent. Pour cette raison, il suffit de calculer les images possibles d'un générateur modulo nilpotent de $F(\lambda)$ dans $S^d(F(1) \otimes V)$ afin de réaliser un morphisme de $\mathrm{Hom}_{\mathcal{U}}\left(F(\lambda), S^d(F(1) \otimes V)\right)$. Une telle détermination est énoncée dans le lemme 2.3.0.7 ci-dessous. Avant de formuler ce lemme, on fixe les notations :

Notation 2.3.0.6. *Soit $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_t)$. On note :*

$$\omega_\alpha = \mathrm{Sq}_0^{\alpha_1} \iota_{\lambda_1} \otimes \mathrm{Sq}_0^{\alpha_2} \iota_{\lambda_2} \otimes \cdots \otimes \mathrm{Sq}_0^{\alpha_t} \iota_{\lambda_t}.$$

Lemme 2.3.0.7. *Soient $\varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{U}}\left(F(\lambda), S^d(F(1) \otimes V)\right)$ et δ un entier tel que $\delta > \max\{\lambda_i\}$. On note $\alpha = (0, \delta, 2\delta, \dots, (t-1)\delta)$. L'élément*

$$\omega_\alpha = \iota_{\lambda_1} \otimes \mathrm{Sq}_0^\delta \iota_{\lambda_2} \otimes \mathrm{Sq}_0^{2\delta} \iota_{\lambda_3} \otimes \cdots \otimes \mathrm{Sq}_0^{(t-1)\delta} \iota_{\lambda_t}$$

est un générateur modulo nilpotent de $F(\lambda)$. Alors :

$$\varphi(\omega_\alpha) = \sum_{i \in I} s_{1,i} u^{\otimes \lambda_1} \otimes \dots \otimes s_{t,i} \left(u^{2^{(t-1)\delta}} \right)^{\otimes \lambda_t}$$

avec $s_{h,i} \left(u^{2^{(h-1)\delta}} \right)^{\otimes \lambda_h} \in S^{\lambda_h}(V u^{2^{(h-1)\delta}})$ et $s_{1,i} u^{\otimes \lambda_1} \in S^{\lambda_1}(Vu)$, la somme étant prise sur une famille d'indices I .

Remarque 2.3.0.8. Le choix $\varphi(\omega_\alpha) = \sum_{i \in I} s_{1,i} u^{\otimes \lambda_1} \otimes \dots \otimes s_{t,i} \left(u^{2^{(t-1)\delta}} \right)^{\otimes \lambda_t}$ permet de réaliser φ comme l'image de l'élément $\sum_i \varphi_{1,i} \otimes \varphi_{2,i} \otimes \dots \otimes \varphi_{k,i}$ par $\psi \circ \rho$ et $\varphi_{j,i}$ désignant le morphisme dans $\text{Hom}_{\mathcal{U}} \left(F(\lambda_j), S^{\lambda_j}(\mathcal{F}(1) \otimes V) \right)$ défini par $\varphi_{j,i}(\iota_{\lambda_j}) = s_{j,i} u^{\otimes \lambda_j}$. Alors le morphisme $\psi \circ \rho$ est surjectif donc bijectif. Cela complète le lemme 2.3.0.7.

2.3.1 Mod-nil générateurs

On donne ci-dessous la notation de module monogène modulo nilpotent.

Définition 2.3.1.1. Un module stable M est mod-nil monogène si il y a un élément α tel que le quotient $M/\mathcal{A}_2\alpha$ soit nilpotent. L'élément α est appelé mod-nil générateur.

La propriété de mod-nil monogène se comporte bien avec les produits tensoriels. Le lemme suivant n'est rien d'autre qu'une reformulation de la proposition 1.1.4.18.

Lemme 2.3.1.2. Pour tous $n, m \in \mathbb{N}$ le module $F(n) \otimes F(m)$ est mod-nil monogène.

Remarque 2.3.1.3. Si $\iota_n \otimes Sq_0^q \iota_m$ est un mod-nil générateur de $F(n) \otimes F(m)$, il en est de même pour les éléments $Sq_0^k(\iota_n \otimes Sq_0^q \iota_m)$ et $\iota_n \otimes Sq_0^{q+k} \iota_m$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Corollaire 2.3.1.4. Si M et N sont mod-nil monogène, leur produit $M \otimes N$ l'est aussi.

Démonstration. Soient α et β les mod-nil générateurs de M et N . L'exactitude des suites suivantes ramène le problème au cas des modules monogènes.

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{A}_2\alpha \otimes \mathcal{A}_2\beta & & & & \\ \downarrow & \searrow & & & \\ \mathcal{A}_2\alpha \otimes N & \longrightarrow & M \otimes N & \twoheadrightarrow & \frac{M}{\mathcal{A}_2\alpha} \otimes N \\ \downarrow & & & & \\ \mathcal{A}_2\alpha \otimes \frac{M}{\mathcal{A}_2\beta} & & & & \end{array}$$

Comme il y a un épimorphisme $F(|\alpha|) \otimes F(|\beta|) \twoheadrightarrow \mathcal{A}_2\alpha \otimes \mathcal{A}_2\beta$ il est suffisant de vérifier que $F(n) \otimes F(m)$ est mod-nil monogène pour tout n, m . La preuve en découle. \square

Définition 2.3.1.5. Si $M \in \mathcal{U}$ est réduit, l'égalité $Sq_0^n(x) = Sq_0^n(y)$ où $x, y \in M$ implique $x = y$. Il en résulte que si $Sq_0^n(x) = z$, on peut définir $\sqrt[n]{z} = x$.

Corollaire 2.3.1.6. *Pour tout suite des entiers $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, le module*

$$F(\lambda) = F(\lambda_1) \otimes \dots \otimes F(\lambda_n)$$

est mod-nil monogène. Pour un choix approprié de $\{\alpha_i, i \geq 2\}$, l'élément

$$\iota_{\lambda_1} \otimes Sq_0^{\alpha_2} \iota_{\lambda_2} \otimes \dots \otimes Sq_0^{\alpha_n} \iota_{\lambda_n}$$

est un mod-nil générateur de $F(\lambda)$. On peut en effet choisir $\alpha_i = (i-1)\delta$ avec $\delta > \max \{\lambda_i\}$.

En particulier, on a :

Proposition 2.3.1.7. *L'élément $u \otimes u^2 \otimes \dots \otimes u^{2^{n-1}}$ est mod-nil générateur du module $F(1)^{\otimes n}$. Les images des projections canoniques $\bigotimes^n \rightarrow S^n$ et $\bigotimes^n \rightarrow \Lambda^n$ de cet élément sont donc mod-nil générateurs des modules $S^n(F(1))$ et $\Lambda^n(F(1))$ respectivement.*

Lemme 2.3.1.8. *Soit α un mod-nil générateur d'un module instable mod-nil monogène M . Si N est un module instable réduit alors tout morphisme de M dans N est déterminé de façon unique par l'image de α dans N .*

Démonstration. Soit f un morphisme de M vers N et m élément arbitraire de M . Par définition de mod-nil monogène module, il y a un entier n tel que $Sq_0^n(m) = \theta(\alpha)$ pour certain $\theta \in \mathcal{A}_2$. Il s'ensuit que $Sq_0^n(f(m)) = f(Sq_0^n(m)) = f(\theta(\alpha)) = \theta f(\alpha)$. Comme N est réduit $f(m) = \sqrt[n]{\theta f(\alpha)}$. \square

2.3.2 Un lemme combinatoire

Dans cette sous-section on démontre un lemme combinatoire et étudie l'action de l'algèbre de Steenrod sur certaines classes.

Lemme 2.3.2.1. *Soient $m_1 < m_2 < \dots < m_k$ et $l_0 \leq l_1 \leq \dots \leq l_q$ des entiers. Si*

$$\sum_{i=1}^k 2^{m_i} = \sum_{i=0}^q 2^{l_i}$$

alors il existe une partition S_1, S_2, \dots, S_k de $\{l_0, l_1, \dots, l_q\}$ tel que $\sum_{j \in S_i} 2^{l_j} = 2^{m_i}$. Par conséquent $q+1 \geq k$.

Démonstration. On raisonne par récurrence sur m_k . Le lemme est trivial pour le cas $m_k = 1$. Supposons que le lemme est vérifié pour tout $m_k < n$. On passe au cas $m_k = n$.

1. Si $m_1, l_0 > 0$, en divisant les deux côtés de l'égalité

$$\sum_{i=1}^k 2^{m_i} = \sum_{i=1}^q 2^{l_i}$$

par 2 on revient au cas $m_k = n-1$.

2. Si $m_1 = 0$ alors $l_0 = 0$. Comme $m_2 > 0$ deux côtés de l'égalité

$$\sum_{i=2}^k 2^{m_i} = \sum_{i=2}^q 2^{l_i} \tag{2.3.1}$$

sont divisibles par 2. Soit $a(q)$ l'indice telle que $0 = l_0 = \dots = l_{a(q)} < l_{a(q)+1}$. Donc $a(q)$ doit être divisible par 2. En divisant deux côtés de 2.3.1 par 2 on a :

$$\sum_{i=2}^k 2^{m_i-1} = \sum_{i=0}^{a(q)/2-1} 2^{l_{2i+1}} + \sum_{i=a(q)+1}^q 2^{l_i-1}.$$

Par l'hypothèse de récurrence on a une partition de l'ensemble d'indices

$$\{l_1, l_3, \dots, l_{a(q)-1}\} \cup \{l_{a(q)+1} - 1, \dots, l_q - 1\}$$

en $k-1$ sous-ensembles T_2, \dots, T_k tel que $\sum_{j \in T_i} 2^j = 2^{m_i-1}$. Pour tout i on note :

$$\begin{aligned} S'_i &= T_i \cap \{l_1, l_3, \dots, l_{a(q)-1}\}, \\ T'_i &= T_i \cap \{l_{a(q)+1} - 1, \dots, l_q - 1\}. \end{aligned}$$

Notons

$$S_1 = \{l_0\}, \quad S_i = S'_i \cup \{l_{2j+2} \mid l_{2j+1} \in S'_i\} \cup \{l+1 \mid l \in T'_i\},$$

alors S_1, S_2, \dots, S_k est une partition pour le cas $m_k = n$.

□

Ceci donne aussitôt :

Corollaire 2.3.2.2. *Soit (a_1, \dots, a_k) une famille d'entiers positifs deux à deux distincts. On suppose que les décompositions 2-adiques de deux entiers distincts de la famille n'ont pas de puissance de 2 en commun. Alors si on a une égalité $\sum_{i=1}^q 2^{l_i} = \sum_{j=1}^k a_j$, il existe une partition S_1, \dots, S_k de $\{1, \dots, q\}$ telle que pour tout $i = 1, \dots, k$ on ait $\sum_{j \in S_i} 2^{l_j} = a_i$.*

Afin de démontrer le lemme 2.3.0.7, on doit déterminer les images dans $S^d(F(1) \otimes V)$ de $\omega_\alpha = \iota_{\lambda_1} \otimes \text{Sq}_0^\delta \iota_{\lambda_2} \otimes \text{Sq}_0^{2\delta} \iota_{\lambda_3} \otimes \dots \otimes \text{Sq}_0^{(t-1)\delta} \iota_{\lambda_t}$. Puisque le degré de ω_α soit égal à ce de son image, on obtient une égalité

$$\lambda_1 + 2^\delta \lambda_2 + 2^{2\delta} \lambda_3 + \dots + 2^{(t-1)\delta} \lambda_t = 2^{l_1} + \dots + 2^{l_d}.$$

Le lemme suivant fournit une première détermination des l_i à partir de cette égalité.

Lemme 2.3.2.3. *Soient $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_t)$ une suite d'entiers dont la somme vaut d et δ un entier tel que $\delta > \max \{\lambda_i\}$. On suppose que l'identité a lieu*

$$\lambda_1 + 2^\delta \lambda_2 + 2^{2\delta} \lambda_3 + \dots + 2^{(t-1)\delta} \lambda_t = 2^{l_1} + \dots + 2^{l_d}.$$

$l = (l_1, \dots, l_d)$ désignant une suite croissante. Il existe une partition unique de $\{1, \dots, d\}$ en t sous-ensembles E_i tels que :

– Pour tout i on a

$$2^{(i-1)\delta} \lambda_i = \sum_{h \in E_i} 2^{l_h},$$

- chaque sous-ensemble E_i est constitué par une famille d'entiers successifs $\{k, \dots, k+r\}$,
- $\text{card}(E_1) \leq \lambda_1$.

Démonstration. La condition $\delta > \max \{\lambda_i\}$ permettra d'appliquer 2.3.2.2.

On va supposer que $\alpha_2 = \dots = \alpha_t = \delta > \max(\lambda_j)$ et que la longueur 2-adique de $2^\delta - t$ est strictement supérieure à d pour $t \leq d2^{\lambda_i} - \lambda_i$. On va démontrer le résultats dans ce cas.

On a donc

$$\lambda_1 + 2^\delta \lambda_2 + 2^{2\delta} \lambda_3 + \dots + 2^{(t-1)\delta} \lambda_t = 2^{l_1} + \dots + 2^{l_d}$$

avec $\lambda_1 + \dots + \lambda_t = d$.

Soit τ le premier indice tel que $l_\tau \leq \lambda_1 < l_{\tau+1}$. On va montrer que $\sum_{i=1}^{\tau} l_i = \lambda_1$. L'égalité

$$\left(\sum_{i=1}^{\tau} 2^{l_i} \right) - \lambda_1 = 2^\delta \left(\lambda_2 + 2^\delta \lambda_3 + \dots + 2^{(t-2)\delta} \lambda_t \right) - \sum_{i=\tau+1}^d 2^{l_i}$$

montre que $\left(\sum_{i=1}^{\tau} 2^{l_i} \right) - \lambda_1$ est divisible par 2^{λ_1} . Il s'ensuit que $\left(\sum_{i=1}^{\tau} 2^{l_i} \right)$ est supérieure ou égale à λ_1 . Si l'inégalité est stricte, la différence $\left(\sum_{i=1}^{\tau} 2^{l_i} \right) - \lambda_1$ est majorée par $d2^{\lambda_1} - \lambda_1$. Il suit que la longueur 2-adique de la somme $2^\delta \left(\lambda_2 + 2^\delta \lambda_3 + \dots + 2^{(t-2)\delta} \lambda_t \right) - \left(\sum_{i=1}^{\tau} 2^{l_i} \right) + \lambda_1$ est supérieure que $d+1$. Cela n'est impossible puisque d majore la longueur 2-adique de $\sum_{i=\tau+1}^d 2^{l_i}$. On en déduit que $\sum_{i=1}^{\tau} l_i = \lambda_1$. Alors on peut choisir $E_1 = \{1, \dots, \tau\}$. La suite du lemme se démontre de la même manière en utilisant le corollaire 2.3.2.2.

Il découle des égalités

$$2^{(i-1)\delta} \lambda_i = \sum_{h \in E_i} 2^{l_h},$$

que $\text{card}(E_i) \leq 2^{(i-1)\delta} \lambda_i$ et en particulier, $\text{card}(E_1) \leq \lambda_1$. □

Pour que le lemme 2.3.0.7 soit vérifié, il faut qu'on montre que $\text{card}(E_i) = \lambda_i$. L'inégalité $\text{card}(E_1) \leq \lambda_1$ suggère qu'on peut obtenir $\text{card}(E_i) \leq \lambda_i$ pour tous les indices i . Malheureusement, l'argument combinatoire n'est pas suffisant pour nous mener à cette conclusion. Il faut que l'on étudie l'action de l'algèbre de Steenrod sur certaines classes afin de réaliser ces inégalités.

2.3.3 L'action des opérations de Steenrod

On commence par introduire certaines opérations de Milnor, pour lesquelles on choisit une notation spécifique.

Théorème 2.3.3.1 ([Mil58, appendice 1]). *Le dual de l'algèbre de Steenrod est déterminé par la formule ci-dessous :*

$$(\mathcal{A}_2)^* = \mathbb{F}_2 [\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_i, \dots], \quad |\xi_i| = 2^i - 1, \xi_0 = 1.$$

Théorème 2.3.3.2 ([Mil58, appendice 1]). *L'homologie de $B\mathbb{Z}_2$ est l'algèbre polynomiale $\mathbb{F}_2[u]$ engendrée par u de degré 1. Elle est une cogèbre sur le dual de l'algèbre de Steenrod $(\mathcal{A}_2)^*$ par*

action :

$$u \mapsto u + u^2 \otimes \xi_1 + \cdots + u^{2^r} \otimes \xi_r + \cdots$$

Définition 2.3.3.3. On notera $m_n(r)$ l'opération duale de ξ_r^n .

Remarque 2.3.3.4. La cohomologie de $B\mathbb{Z}_2$ est isomorphe à l'algèbre polynomiale engendré par un seul générateur de degré 1. Par abus de notation, on la note ainsi $\mathbb{F}_2[u]$. Le module $F(1)$ peut être considéré comme un sous-module de $\mathbb{F}_2[u]$ engendré par u . Par conséquent, le module $F(n) = (F(1))^{\otimes n}$ est un sous-module de $\mathbb{F}_2[u]^{\otimes n}$ engendré par $u^{\otimes n}$.

Lemme 2.3.3.5. On a :

$$\begin{aligned} m_n(r)(u^{\otimes n}) &= (u^{2^r})^{\otimes n}, \\ m_n(r)\left(u^{\otimes n} \otimes (u^{2^k})^{\otimes m}\right) &= (u^{2^r})^{\otimes n} \otimes (u^{2^k})^{\otimes m} \text{ si } 2^k > m. \end{aligned}$$

Démonstration. On vérifie la première égalité. La deuxième suit de même manière. L'élément $u^{\otimes n}$ est le dual de $u^{\otimes n} \in H^*(B\mathbb{Z}_2)^{\otimes n}$. La co-action de $(\mathcal{A}_2)^*$ sur cet élément est déterminé par :

$$u^{\otimes n} \mapsto \sum_i u^{2^{i_1}} \otimes \cdots \otimes u^{2^{i_n}} \otimes (\xi_{i_1} \cdots \xi_{i_n})$$

donc l'élément associé à ξ_r^n est $(u^{2^r})^{\otimes n}$. Il s'ensuit que

$$m_n(r)(u^{\otimes n}) = (u^{2^r})^{\otimes n}$$

par dualité. □

A l'aide du lemme 2.3.3.5, on obtient un résultat plus général.

Proposition 2.3.3.6. Soit M et N deux modules instables. Pour toute classe $x \in M$ de degré n on a $m_n(r)(x) = \text{Sq}_0^r(x)$. Pour toute classe $x \in M$ de degré n , toute classe $y \in M$ et tout entier k tel que $2^k > n$ on a

$$m_n(r)(x \otimes \text{Sq}_0^k(y)) = \text{Sq}_0^r(x) \otimes \text{Sq}_0^k(y).$$

Démonstration. On considère le morphisme $\varphi : F(n) \rightarrow M$ déterminé par $\iota_n = u^{\otimes n} \mapsto x$. D'après le lemme 2.3.3.5 on a :

$$\begin{aligned} m_n(r)(x) &= m_n(r)(\varphi(u^{\otimes n})) \\ &= \varphi(m_n(r)(u^{\otimes n})) \\ &= \varphi(\text{Sq}_0^r(u^{\otimes n})) \\ &= \text{Sq}_0^r\varphi((u^{\otimes n})) \\ &= \text{Sq}_0^r(x). \end{aligned}$$

De même manière, en considérant le morphisme $\psi : \Phi^k(F(|y|)) \rightarrow N$ et le produit $\varphi \otimes \psi$, on obtient la deuxième égalité. □

2.3.4 La preuve du lemme 2.3.0.7

Dans ce qui suit, on donne la démonstration du lemme principal 2.3.0.7. Le lemme 2.3.0.4 et le théorème 2.2.1.1 en découlent.

Démonstration du lemme 2.3.0.7. L'image de la classe ω_α est somme de l'image de tenseurs de la forme $u^{2^{l_1}} \otimes \cdots \otimes u^{2^{l_d}}$ dans la puissance symétrique $S^d(V \otimes F(1))$. L'image de la classe ω_α est somme de classes de tenseurs de ce type, satisfaisant à la condition

$$\lambda_1 + 2^\delta \lambda_2 + 2^{2\delta} \lambda_3 + \cdots + 2^{(t-1)\delta} \lambda_t = 2^{l_1} + \cdots + 2^{l_d}$$

On veut montrer que dans ce tenseur $u^{2^{l_1}} \otimes \cdots \otimes u^{2^{l_d}}$, u apparaît λ_1 fois, u^{2^δ} apparaît λ_2 fois et ainsi de suite, $u^{(i-1)\delta}$ apparaît λ_i fois. Le lemme 2.3.2.3 implique que u apparaît au plus λ_1 fois. Si on montre le même résultat pour tout i on aura forcément³ $\text{card}(E_i) = \lambda_i$ et la démonstration sera achevée.

Il suit de la proposition 2.3.3.6 que

$$m_{\lambda_1}(t\delta) \left(\omega_{(0,\delta,2\delta,\dots,(t-1)\delta)} \right) = \omega_{(t\delta,\delta,\dots,(t-1)\delta)}.$$

Par ailleurs, on a

$$\omega_{(t\delta,\delta,\dots,(t-1)\delta)} = \text{Sq}_0^\delta \omega_{((t-1)\delta,0,\delta,\dots,(t-2)\delta)}.$$

On note k_1 l'indice tel que $\sum_{i=1}^{k_1} 2^{l_i} = \lambda_1$. Parce que

$$\sum_{i=k_1+1}^d 2^{l_i} = 2^\delta \left(\lambda_2 + 2^\delta \lambda_3 + \cdots + 2^{(t-2)\delta} \lambda_t \right)$$

on a : $2^{l_{k_1+1}} > \lambda_1$. Au cas contraire, la longueur 2-adique de $2^\delta - 2^{l_{k_1+1}}$ est plus grande que d . Par la proposition 2.3.3.6, on obtient

$$\begin{aligned} m_{\lambda_1}(t\delta) \left(u^{2^{l_1}} \otimes \cdots \otimes u^{2^{l_d}} \right) &= \text{Sq}_0^{t\delta} \left(u^{2^{l_1}} \otimes \cdots \otimes u^{2^{l_{k_1}}} \right) \otimes u^{2^{l_{k_1+1}}} \otimes \cdots \otimes u^{2^{l_d}} \\ &= \text{Sq}_0^\delta \varphi \left(\omega_{((t-1)\delta,0,\delta,\dots,(t-2)\delta)} \right) \end{aligned}$$

Il en découle que $l_i \geq \delta$ pour tout $i > k_1$. De plus

$$2^\delta \lambda_2 = \sum_{i \in E_2} 2^{l_i}$$

donc on obtient l'égalité

$$\lambda_2 = \sum_{i \in E_2} 2^{l_i - \delta}.$$

Cela signifie que $\text{Card}(E_2) \leq \lambda_2$. De même manière, en considérant les éléments

$$m_{\lambda_1+\lambda_2+\dots+\lambda_i}(t\delta) \left(\omega_{(0,\delta,2\delta,\dots,(t-1)\delta)} \right)$$

3. Cela provient du fait que la somme des λ_i ainsi que celle des $\text{card}(E_i)$ vaut d .

on obtient l'inégalité $\text{Card}(E_{i+1}) \leq \lambda_{i+1}$. Le lemme en découle.

□

Sur la résolution injective minimale de $\Sigma^d J(n)$

LES SUITES EXACTES DE MAHOWALD dans la catégorie \mathcal{U} signifient que la suspension du module de Brown-Gitler $J(n)$ est de dimension injective majorée par 1. En fait, si n est pair, $\Sigma J(n) \cong J(n+1)$ donc la dimension injective de $\Sigma J(n)$ est 0. Sinon, la suite exacte de Mahowald

$$0 \rightarrow \Sigma J(2k+1) \rightarrow J(2k+2) \rightarrow J(k+1) \rightarrow 0$$

montre que la dimension injective de $\Sigma J(2k+1)$ est 1. A partir de cela, on donne une procédure itérative afin de construire une résolution injective de $\Sigma^d J(n)$ de manière élémentaire. Puisque $J(0) = \mathbb{F}_2$, le cas particulier de $\Sigma^d J(0)$ fournit de l'information sur la page E_2 de la suite spectrale d'Adams instable. Les résultats qui suivent ne sont qu'une première approche qui sera améliorée dans l'avenir. Il existe déjà dans la littérature une résolution injective de $\Sigma^n \mathbb{F}_2$ basée sur la Λ -algèbre et due à Lin [Lin92] mais celle-ci n'est pas minimale en général. On réfère par exemple à [Sch94] pour les généralités et rappels (sauf mention explicite).

3.1 Une résolution injective de $\Sigma^d J(n)$

On rappelle que le module \mathcal{A} est la somme directe de toutes les modules de Brown-Gitler (voir 1.1.4.36). Puisque les modules $\Sigma J(n)$ sont de dimension injective majorée par 1, on a :

Proposition 3.1.0.1. *Le module $\Sigma \mathcal{A}$ est de dimension injective 1. Plus précisément, il y a une suite exacte courte*

$$0 \rightarrow \Sigma \mathcal{A} \xrightarrow{s_1} \mathcal{A} \xrightarrow{\omega_0} \mathcal{A} \rightarrow 0.$$

Démonstration. Par définition, on a

$$\begin{aligned} \Sigma \mathcal{A} &= \Sigma \bigoplus_{k \geq 0} J(k) \\ &= \bigoplus_{k \geq 0} \Sigma J(k) = \left(\bigoplus_{m \geq 0} J(2m+1) \right) \oplus \left(\bigoplus_{n \geq 0} \Sigma J(2n+1) \right). \end{aligned}$$

En prenant la somme directe des suites exactes courtes

$$0 \rightarrow \Sigma J(n) \xrightarrow{\sigma_n} J(n+1) \xrightarrow{\bullet Sq^{\frac{n+1}{2}}} J\left(\frac{n+1}{2}\right) \rightarrow 0$$

on obtient la suite exacte

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \bigoplus_{n \geq 0} \Sigma J(n) & \xrightarrow{s_1 = \bigoplus_{n \geq 0} \sigma_n} & \bigoplus_{n \geq -1} J(n+1) & \xrightarrow{\omega_0 = \bigoplus_{n \geq -1} \bullet Sq^{\frac{n+1}{2}}} & \bigoplus_{n \geq -1} J\left(\frac{n+1}{2}\right) \longrightarrow 0 \\ & & \parallel & & \parallel & & \parallel \\ & & \Sigma \mathcal{A} & & \mathcal{A} & & \mathcal{A} \end{array} \quad (3.1.1)$$

qui n'est rien d'autre que la résolution injective minimale de $\Sigma \mathcal{A}$. \square

Lemme 3.1.0.2. *Le morphisme induit*

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{U}}(\Sigma^n \mathbb{F}_2, \mathcal{A}) \xrightarrow{(\omega_0)_*} \mathrm{Hom}_{\mathcal{U}}(\Sigma^n \mathbb{F}_2, \mathcal{A})$$

est trivial pour $n \geq 1$ et un isomorphisme $\mathbb{F}_2 \rightarrow \mathbb{F}_2$ si $n = 0$.

Démonstration. Il résulte de l'isomorphisme $\tilde{\Sigma} \mathcal{A} \cong \mathcal{A}$ que

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_{\mathcal{U}}(\Sigma^n \mathbb{F}_2, \Sigma^m \mathcal{A}) &\cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{U}}(\mathbb{F}_2, \tilde{\Sigma}^n \Sigma^m \mathcal{A}) \\ &\cong \begin{cases} \mathrm{Hom}_{\mathcal{U}}(\mathbb{F}_2, \tilde{\Sigma}^{n-m} \mathcal{A}) & \text{si } m \leq n, \\ \mathrm{Hom}_{\mathcal{U}}(\mathbb{F}_2, \Sigma^{m-n} \mathcal{A}) & \text{sinon;} \end{cases} \\ &\cong \begin{cases} \mathbb{F}_2 & \text{si } m \leq n, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \end{aligned}$$

Il découle de la résolution injective de $\Sigma \mathcal{A}$ (voir la proposition 3.1.0.1) qu'on a la suite exacte

$$\begin{array}{c} 0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{U}}(\Sigma^n \mathbb{F}_2, \Sigma \mathcal{A}) \xrightarrow{(s_1)_*} \mathrm{Hom}_{\mathcal{U}}(\Sigma^n \mathbb{F}_2, \mathcal{A}) \\ \downarrow (\omega_0)_* \\ \mathrm{Hom}_{\mathcal{U}}(\Sigma^n \mathbb{F}_2, \mathcal{A}) \longrightarrow \mathrm{Ext}_{\mathcal{U}}^1(\Sigma^n \mathbb{F}_2, \Sigma \mathcal{A}) \longrightarrow 0. \end{array}$$

Si $n \geq 1$ le morphisme $(s_1)_* : \mathbb{F}_2 \rightarrow \mathbb{F}_2$ est un isomorphisme d'où la trivialité de $(\omega_0)_*$. Si $n = 0$ il résulte de la trivialité du groupe $\mathrm{Hom}_{\mathcal{U}}(\mathbb{F}_2, \Sigma \mathcal{A}) = 0$ que le morphisme $(\omega_0)_* : \mathbb{F}_2 \rightarrow \mathbb{F}_2$ est un isomorphisme. \square

Ce lemme, joint à la proposition 3.1.0.1, permet de montrer :

Proposition 3.1.0.3. *On a*

$$\mathrm{Ext}_{\mathcal{U}}^1(\Sigma^n \mathbb{F}_2, \Sigma \mathcal{A}) \cong \begin{cases} \mathbb{F}_2 & \text{si } n \geq 1, \\ 0 & \text{si } n = 0. \end{cases}$$

On généralise les notations de $\omega_0 : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ et de $s_1 : \Sigma \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ en introduisant :

Notation 3.1.0.4. Pour $m, n \geq 0$ on note $\omega_n : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ le morphisme défini par :

$$\omega_m|_{J(s)} = \begin{cases} \bullet Sq^k & \text{si } s = 2k + m, k \geq 0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On désigne par $s_n : \Sigma^n \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ le morphisme défini récursivement par :

$$s_n = s_1 \circ (\Sigma s_{n-1}).$$

Par définition, on obtient :

Proposition 3.1.0.5. Pour $n \geq 0$, les diagrammes suivants

$$\begin{array}{ccc} \Sigma^n \mathcal{A} & \xrightarrow{\Sigma^n \omega_m} & \Sigma^n \mathcal{A} \\ s_n \downarrow & & \downarrow s_n \\ \mathcal{A} & \xrightarrow{\omega_{n+m}} & \mathcal{A} \end{array}$$

sont commutatifs.

La proposition suivante généralise le lemme 3.1.0.2.

Proposition 3.1.0.6. Le morphisme induit

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{U}}(\Sigma^n \mathbb{F}_2, \mathcal{A}) \xrightarrow{(\omega_m)_*} \mathrm{Hom}_{\mathcal{U}}(\Sigma^n \mathbb{F}_2, \mathcal{A})$$

est trivial pour $n \neq m$ et un isomorphisme $\mathbb{F}_2 \rightarrow \mathbb{F}_2$ si $n = m$.

Démonstration. On raisonne par récurrence sur m .

1. Le cas $m = 0$ a été montré dans la proposition 3.1.0.3.
2. Supposons qu'on a vérifié le lemme pour $m < k$, on passe au cas $m = k$.

Il résulte de la proposition 3.1.0.3 et de la proposition 3.1.0.5 que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}_{\mathcal{U}}(\Sigma^n \mathbb{F}_2, \Sigma \mathcal{A}) & \xrightarrow{(\Sigma \omega_{m-1})_*} & \mathrm{Hom}_{\mathcal{U}}(\Sigma^n \mathbb{F}_2, \Sigma \mathcal{A}) \\ (s_1)_* \downarrow & & \downarrow (s_1)_* \\ \mathrm{Hom}_{\mathcal{U}}(\Sigma^n \mathbb{F}_2, \mathcal{A}) & \xrightarrow{(\omega_m)_*} & \mathrm{Hom}_{\mathcal{U}}(\Sigma^n \mathbb{F}_2, \mathcal{A}) \end{array}$$

est commutatif. Il en découle que le morphisme $(\omega_m)_*$ est trivial pour $n \neq m$ et est un isomorphisme sinon.

Cela conclut la récurrence. □

Puisque $\tilde{\Sigma}(\bullet Sq^k) = \bullet Sq^k$ et $\tilde{\Phi}(\bullet Sq^{2k}) = \bullet Sq^k$, on obtient :

Proposition 3.1.0.7. On a

$$\begin{aligned} \tilde{\Sigma} \omega_m &= \omega_{m-1}, \\ \tilde{\Phi} \omega_m &= \begin{cases} \omega_k & \text{si } m = 2k, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \end{aligned}$$

Démonstration. Par définition, on a

$$\begin{aligned}\tilde{\Sigma}\omega_m|_{J(s)} &= \tilde{\Sigma}\omega_m|_{\tilde{\Sigma}(J(s+1))} = \begin{cases} \tilde{\Sigma}(\bullet Sq^t) & \text{si } s+1 = 2t+m, t \geq 0, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases} \\ &= \begin{cases} \bullet Sq^t & \text{si } s = 2t+m-1, t \geq 0, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases} \\ &= \omega_{m-1}|_{J(s)}; \\ \tilde{\Phi}\omega_m|_{J(s)} &= \tilde{\Phi}\omega_m|_{\tilde{\Phi}(J(2s))} = \begin{cases} \tilde{\Phi}(\bullet Sq^t) & \text{si } 2s = 2t+m, t \geq 0, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases} \\ &= \begin{cases} \bullet Sq^{\frac{t}{2}} & \text{si } s = t + \frac{m}{2}, t \geq 0, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases} \\ &= \begin{cases} \omega_k & \text{si } m = 2k, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}\end{aligned}$$

La proposition en découle. □

Notation 3.1.0.8. On note $\tilde{\Sigma}^{-1}\omega_{n-1} = \omega_n$. Soit un morphisme

$$f : \mathcal{A}^{\oplus m} \rightarrow \mathcal{A}^{\oplus n}.$$

Si le morphisme f s'écrit sous forme matrice $\{a_{i,j}\}$ dont chaque coefficient $a_{i,j}$ est l'un des morphismes ω_k , définis dans 3.1.0.4, on désigne par $\tilde{\Sigma}(M)$, $\tilde{\Sigma}^{-1}(M)$ et $\tilde{\Phi}(M)$ les matrices

$$\left\{ \tilde{\Sigma}(a_{i,j}) \right\}, \left\{ \tilde{\Sigma}^{-1}(a_{i,j}) \right\} \text{ et } \left\{ \tilde{\Phi}(a_{i,j}) \right\}$$

respectivement.

La relation d'Adem

Afin de calculer le composé des morphismes ω_n , on aura besoin de la reformulation de la relation d'Adem :

Lemme 3.1.0.9. On considère le générateur ι_{n+k} de $F(n+k)$. L'identité suivante a lieu

$$Sq^{2n-i}Sq^n\iota_{n+k} = \sum_{h=i-\lfloor \frac{i}{2} \rfloor}^{\lfloor \frac{k+i}{2} \rfloor} \binom{h-1}{2h-i} Sq^{2n+h-i}Sq^{n-h}\iota_{n+k}.$$

Démonstration. Il résulte de la relation d'Adem qu'on a

$$\begin{aligned}Sq^{2n-i}Sq^n\iota_{n+k} &= \sum_{t=0}^{\lfloor \frac{2n-i}{2} \rfloor} \binom{n-t-1}{2n-i-2t} Sq^{3n-i-t}Sq^t\iota_{n+k} \\ &= \sum_{h=n-\lfloor \frac{2n-i}{2} \rfloor}^n \binom{h-1}{2h-i} Sq^{2n+h-i}Sq^{n-h}\iota_{n+k} \text{ en posant } h = n-t\end{aligned}$$

$$= \sum_{h=i-\lfloor \frac{i}{2} \rfloor}^n \binom{h-1}{2h-i} Sq^{2n+h-i} Sq^{n-h} \iota_{n+k}. \quad (\text{Adem})$$

Par l'instabilité, $e(2n+h-i, n-h) \leq n+k$. Il s'ensuit que

$$\begin{aligned} (2n+h-i) - (n-h) &\leq n+k \\ \Rightarrow 2h &\leq k+i \\ \Rightarrow h &\leq \left\lceil \frac{k+i}{2} \right\rceil. \end{aligned}$$

En reformulant l'identité (Adem) on obtient le résultat. □

Proposition 3.1.0.10. *Pour $1 \leq i \leq l$ on a*

$$\omega_{l-i} \circ \omega_l = \sum_{h=i-\lfloor \frac{i}{2} \rfloor}^{\lfloor \frac{l}{2} \rfloor} \binom{h-1}{2h-i} \omega_{l-i+h} \circ \omega_{l-2h}.$$

Démonstration. Le morphisme restreint $\omega_{l-i} \circ \omega_l|_{J(2n+l)}$ est le morphisme

$$\bullet Sq^{2n-i} Sq^n : J(4n-2i+l) \rightarrow J(n-i+l).$$

Posant :

$$Sq^{2n-i} Sq^n = \sum_{e(I) \leq n+l-i} Sq^I + \sum_{e(I) > n+l-i} Sq^I,$$

on obtient

$$\bullet Sq^{2n-i} Sq^n = \bullet \left(\sum_{e(I) \leq n+k} Sq^I \right) : J(4n-2i+l) \rightarrow J(n-i+l).$$

Compte tenu du lemme 3.1.0.9 on conclut la proposition. □

Remarque 3.1.0.11. *L'inégalité $h > i-1$ implique $2h-i > h-1$. On obtient la relation*

$$\omega_{l-i} \circ \omega_l = \sum_{h=i-\lfloor \frac{i}{2} \rfloor}^{m_{(l,i)}} \binom{h-1}{2h-i} \omega_{l-i+h} \circ \omega_{l-2h},$$

$m_{(l,i)}$ désignant $\min \left\{ \left\lfloor \frac{l}{2} \right\rfloor, i-1 \right\}$.

3.1.1 L'algorithme BG

On a observé que les suspensions de modules de Brown-Gitler sont de dimension injective majorée par 1. Le lemme 1.5.0.24 nous suggère une jolie procédure itérative pour construire une résolution injective d'une suspension arbitraire.

Théorème 3.1.1.1 (L'algorithme BG). *Soit M un module instable et soit*

$$0 \rightarrow M \rightarrow I^0 \rightarrow I^1 \rightarrow \dots \rightarrow I^{n-1} \rightarrow 0$$

une résolution injective de M dont chaque module I^j est une somme directe de modules de Brown-Gitler. Il existe une résolution injective de ΣM

$$0 \rightarrow \Sigma M \rightarrow J^0 \rightarrow J^1 \rightarrow \dots \rightarrow J^n \rightarrow 0$$

telle que $J^i \cong \text{Div}_1(I^{i-1}) \oplus \text{Aug}_1(I^i)$. On rappelle que

$$\begin{aligned} \text{Div}_1 \left(\bigoplus_{\alpha} J(n_{\alpha}) \right) &= \bigoplus_{\alpha} J \left(\frac{1+n_{\alpha}}{2} \right), \\ \text{Aug}_1 \left(\bigoplus_{\alpha} J(n_{\alpha}) \right) &= J(1+n_{\alpha}). \end{aligned}$$

Démonstration. Il résulte de l'injectivité des modules $\text{Div}_1(I^{i-1})$ et $\text{Aug}_1(I^i)$ qu'on a le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccc} \Sigma M & \longrightarrow & \Sigma I^0 & \xrightarrow{\Sigma \beta_0} & \Sigma I^1 & \xrightarrow{\Sigma \beta_1} & \dots \xrightarrow{\Sigma \beta_{n-2}} \Sigma I^{n-1} \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow f_0 & & \downarrow f_1 & & \downarrow f_{n-1} \\ & & \text{Aug}_1(I^0) & \xrightarrow{\gamma_0} & \text{Aug}_1(I^1) & \xrightarrow{\gamma_1} & \dots \xrightarrow{\gamma_{n-2}} \text{Aug}_1(I^{n-1}) \\ & & \downarrow g_0 & & \downarrow g_1 & & \downarrow g_{n-1} \\ & & \text{Div}_1(I^0) & \xrightarrow{\delta_0} & \text{Div}_1(I^1) & \xrightarrow{\delta_1} & \dots \xrightarrow{\delta_{n-2}} \text{Div}_1(I^{n-1}) \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ & & 0 & & 0 & & 0 \end{array}$$

Le résultat découle du lemme 1.5.0.24. □

Avec cet algorithme, on obtient le corollaire :

Corollaire 3.1.1.2. *La dimension injective du module $\Sigma^m J(k)$ est majorée par m . De plus si $k > 2^{m-1}(2n-1)$ il y a une résolution injective $(I_j, \partial_j)_{j=0}^m$ de $\Sigma^m J(k)$, I_j désignant une somme directe $\bigoplus_{i \in K_j} J(i)$ avec $i > n$ pour tout $i \in K_j$.*

Démonstration. On raisonne par récurrence sur m .

1. Le cas $m = 1$ découle de la résolution injective de $\Sigma J(k)$, donnée par la suite exacte de Mahowald.
2. Supposons qu'on l'a vérifié pour tout $m < q$, on passe au cas $m = q$.

On note $(I_{q-1}^t, \partial_{q-1}^t)_{t=0}^{q-1}$ la résolution injective de $\Sigma^{q-1} J(k+1)$ et $(J_{q-1}^t, \gamma_{q-1}^t)_{t=0}^{q-1}$ celle de $\Sigma^{q-1} J\left(\frac{k+1}{2}\right)$ obtenues par application itérative q fois de l'algorithme BG à $J(k+1)$ et à $J\left(\frac{k+1}{2}\right)$ respectivement.

Il résulte du lemme 1.5.0.24 qu'il y a des morphismes $\lambda_{q-1}^t : J_{q-1}^t \rightarrow I_{q-1}^t$ telle que la suite

$$\left(I_q^t = I_{q-1}^{t-1} \oplus I_{q-1}^t, \begin{pmatrix} \gamma_{q-1}^t & 0 \\ \lambda_{q-1}^t & \partial_{q-1}^{t-1} \end{pmatrix} \right)_{t=0}^q \quad (3.1.2)$$

soit une résolution injective de $\Sigma^q J(k)$. L'inégalité $k > 2^{q-1}(2n - 1)$ implique

$$\frac{k+1}{2} > 2^{q-2}(2n - 1).$$

L'hypothèse de récurrence montre que si le module $J(n_\alpha)$ apparaît¹ dans la résolution 3.1.2 alors $n_\alpha > n$.

On conclut la récurrence. □

3.1.1.1 Résolutions injectives minimales

On rappelle dans ce paragraphe la définition de la résolution injective minimale d'un objet d'une catégorie abélienne.

Définition 3.1.1.3. Soit M un objet d'une catégorie abélienne \mathcal{C} . Une résolution injective de M :

$$0 \rightarrow M \rightarrow I^0 \xrightarrow{\partial^0} I^1 \xrightarrow{\partial^1} I^2 \xrightarrow{\partial^2} \dots$$

est dite minimale si I^0 est l'enveloppe injective de M et I^j est l'enveloppe injective de Coker (∂^{j-2}) pour $j \geq 0$.

Dans la catégorie \mathcal{U} , si chaque terme d'une résolution injective d'un module instable est une somme directe de modules de Brown-Gitler, la minimalité de la résolution admet la propriété suivante :

Proposition 3.1.1.4 (Minimalité de résolution injective). Soient M un module instable et

$$0 \rightarrow M \rightarrow I^0 \xrightarrow{\partial^0} I^1 \xrightarrow{\partial^1} I^2 \xrightarrow{\partial^2} \dots \xrightarrow{\partial^{n-1}} I^n \quad (3.1.3)$$

une résolution injective de M telle que chaque terme I^j est une somme directe de modules de Brown-Gitler. Les différentielles ∂^j sont présentées par les matrices dont chaque coefficient représente une flèche entre les modules de Brown-Gitler. La résolution 3.1.3 est minimale si et seulement si aucune flèche n'est identité.

Démonstration. Comme le module de Brown-Gitler $J(n)$ est l'enveloppe injectif de $\Sigma^n \mathbb{F}_2$ qui est un objet simple dans \mathcal{U} , la dimension sur \mathbb{F}_2 du groupe $\text{Ext}_{\mathcal{U}}^i(\Sigma^n \mathbb{F}_2, M)$ est le nombre de copies de $J(n)$ dans le terme i -ème de la résolution injective minimale de M . Parce que, d'une part, l'isomorphisme

$$\text{Hom}_{\mathcal{U}}(\Sigma^n \mathbb{F}_2, J(m)) \cong \mathbb{F}_2$$

si et seulement si $m = n$ et d'autre part, le groupe $\text{Ext}_{\mathcal{U}}^i(\Sigma^n \mathbb{F}_2, M)$ est la cohomologie du complexe

$$\text{Hom}_{\mathcal{U}}(\Sigma^n \mathbb{F}_2, I^{i-1}) \xrightarrow{(\partial^{i-1})_*} \text{Hom}_{\mathcal{U}}(\Sigma^n \mathbb{F}_2, I^i) \xrightarrow{(\partial^i)_*} \text{Hom}_{\mathcal{U}}(\Sigma^n \mathbb{F}_2, I^{i+1})$$

donc la minimalité de la résolution 3.1.3 est équivalente au fait qu'il n'y a pas de flèche identité concernant les facteurs directs $J(n)$ du terme I^i . On conclut la proposition. □

1. C'est à dire qu'il existe j tel que $J(n_\alpha)$ est un facteur direct de I^j .

Notation 3.1.1.5. Soient M un module instable et

$$0 \rightarrow M \rightarrow I^0 \xrightarrow{\partial^0} I^1 \xrightarrow{\partial^1} I^2 \xrightarrow{\partial^2} \dots \xrightarrow{\partial^{n-1}} I^n \quad (3.1.4)$$

une résolution injective de M telle que chaque terme I^j est une somme directe de modules de Brown-Gitler. Les différentielles ∂^j sont présentées par les matrices dont chaque coefficient représente une flèche entre les modules de Brown-Gitler. Si il y a des identités parmi ces flèches, on dit que la résolution 3.1.4 admet des flèches identités.

3.1.1.2 Les premiers exemples

Pour fixer les notations, on donne ci-dessous la définition de la représentation graphique d'une résolution injective de $\Sigma^n \mathbb{F}_2$. Comme chaque module I^j est une somme directe de modules de Brown-Gitler $J(n)$, par abus de notation, on note $J(n) \subset I^j$ si $J(n)$ est un facteur direct de I^j .

Définition 3.1.1.6. Soit une résolution injective du module $\Sigma^n \mathbb{F}_2$:

$$0 \rightarrow \Sigma^n \mathbb{F}_2 \rightarrow I^0 \rightarrow I^1 \rightarrow \dots \rightarrow I^k \rightarrow 0.$$

Comme chaque module I^j est une somme directe finie de modules de Brown-Gitler $J(n_\alpha)$, on notera ces modules par les points $\boxed{n_\alpha}$ sur la colonne j . Les morphismes $J(n) \rightarrow J(m)$ de $J(n) \subset I^j$ vers $J(m) \subset I^{j+1}$ sont représentés par les flèches $\boxed{n} \rightarrow \boxed{m}$. Ces flèches sont $\bullet Sq^{n-m}$ sauf mention explicite.

Exemple 3.1.1.7. On explique dans l'exemple suivant comment obtenir la résolution injective minimale de $\Sigma^n \mathbb{F}_2$ à partir de celle de $\Sigma^{n-1} \mathbb{F}_2$ pour $n \leq 6$. Sauf mention explicite, les morphismes $J(n) \rightarrow J(m)$ seront $\bullet Sq^{n-m}$.

1. $n = 1$: puisque que $\Sigma \mathbb{F}_2 \cong J(1)$, la résolution injective minimale est

$$0 \rightarrow \Sigma \mathbb{F}_2 \xrightarrow{\sim} J(1) \rightarrow 0.$$

2. $n = 2$: la résolution

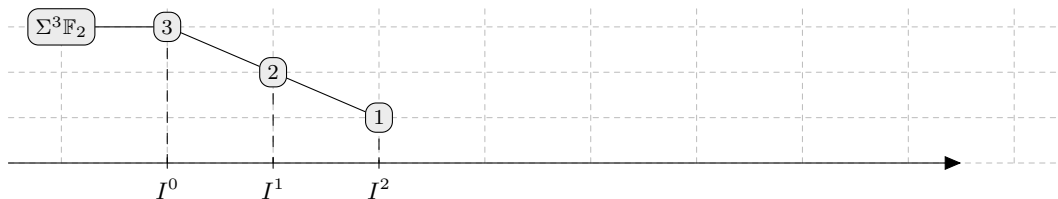
$$0 \rightarrow \Sigma^2 \mathbb{F}_2 \rightarrow J(2) \rightarrow J(1) \rightarrow 0 \quad (\text{Sig2})$$

de $\Sigma^2 \mathbb{F}_2$ provient de la suite de Mahowald.

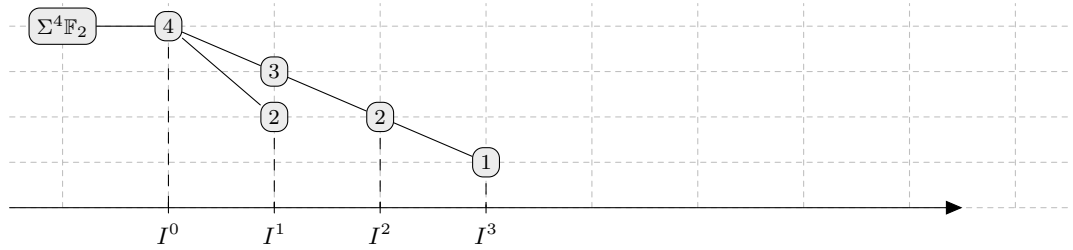
3. $n = 3$: en appliquant l'algorithme BG à la résolution Sig2 on obtient

$$0 \rightarrow \Sigma^3 \mathbb{F}_2 \rightarrow J(3) \rightarrow J(2) \rightarrow J(1) \rightarrow 0. \quad (\text{Sig3})$$

Puisque la suite Sig3 admet aucune flèche identité, elle est minimale. Graphiquement, elle est représentée

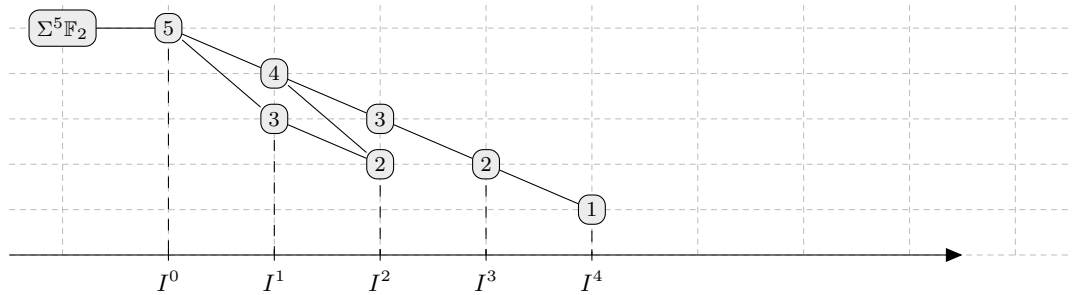


4. $n = 4$: la résolution BG (Sig3) est présentée de manière graphique

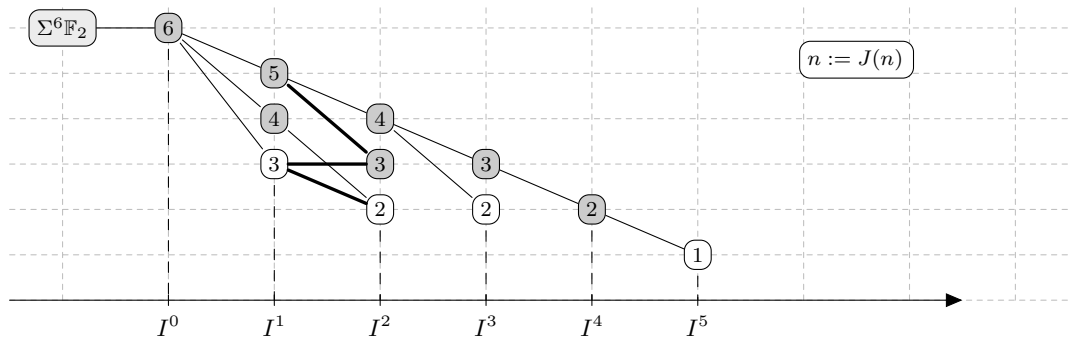


Cette suite est la résolution minimale de $\Sigma^4 \mathbb{F}_2$ puisqu'elle admet aucune flèche identité.

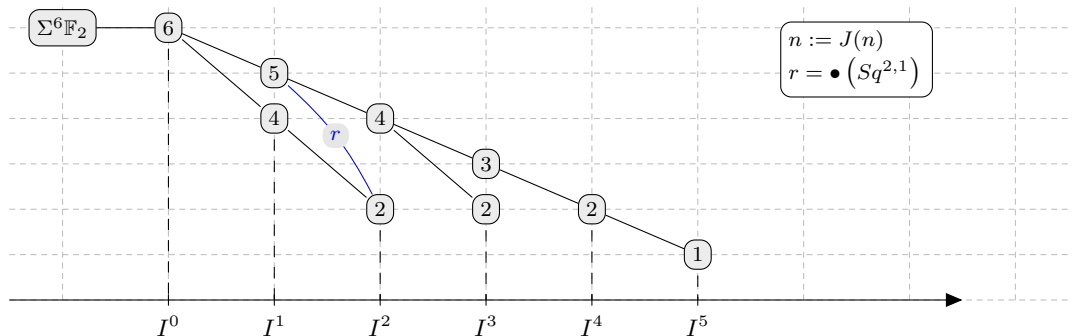
5. $n = 5$: de même, on obtient la résolution minimale de $\Sigma^5 \mathbb{F}_2$:



6. $n = 6$: après avoir appliqué l'algorithme de BG à la résolution injective minimale de $\Sigma^5 \mathbb{F}_2$, on obtient



Les boîtes en couleurs sombres sont obtenues en appliquant Aug_1 sur la résolution injective minimale de $\Sigma^5 \mathbb{F}_2$ trouvée dans l'exemple précédent. Les autres boîtes proviennent de la même résolution après y avoir appliqué Div_1 . On voit apparaître l'identité $J(3) \rightarrow J(3)$ à cause de la relation d'Adem $Sq^1 Sq^2 = Sq^3$. Après avoir éliminé ces modules selon le lemme 1.5.0.23, on obtient la résolution injective minimale de $\Sigma^6 \mathbb{F}_2$:



Le morphisme $r = \bullet Sq^2 Sq^1$ apparaît comme le composé $J(5) \rightarrow J(3) \rightarrow J(2)$ et correspond aux lignes grasses décrites dans le diagramme précédent.

Le lemme d'annulation suivant n'est qu'un corollaire du lemme 1.5.0.23 appliqué au cas particulier des modules de Brown-Gitler.

Lemme 3.1.1.8 (Lemme d'annulation). *Soit M un module instable et soit*

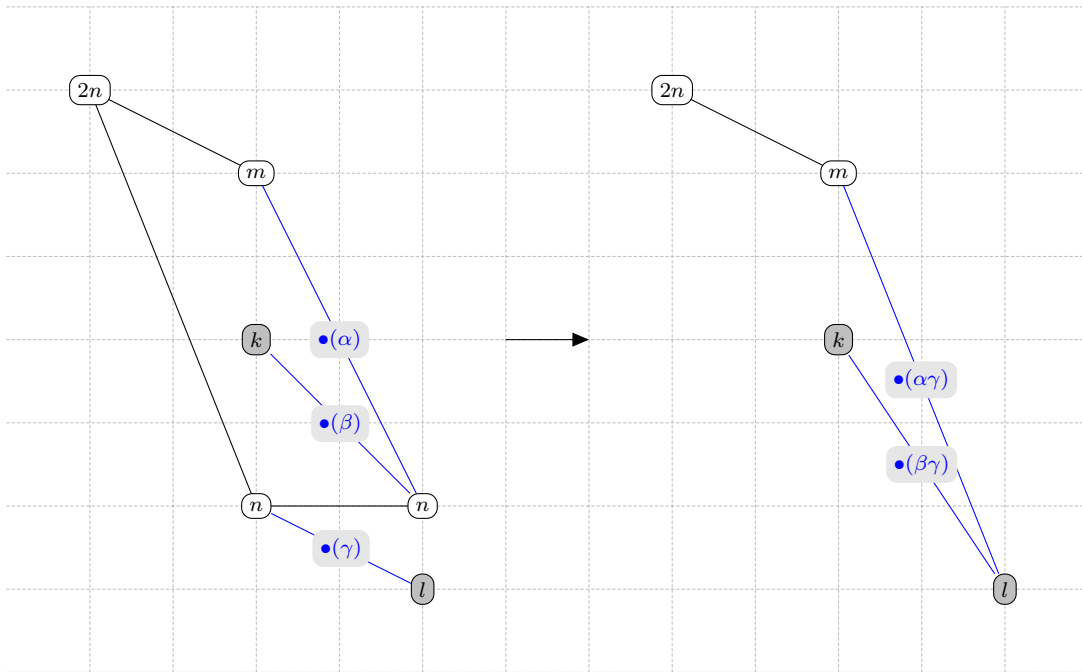
$$0 \rightarrow M \rightarrow I^0 \rightarrow I^1 \rightarrow \dots \rightarrow I^{n-1} \rightarrow 0$$

une résolution injective minimale de M dont chaque module I^j est une somme directe de modules de Brown-Gitler. Il existe une résolution injective de ΣM :

$$0 \rightarrow \Sigma M \rightarrow J^0 \rightarrow J^1 \rightarrow \dots \rightarrow J^n \rightarrow 0$$

telle que $J^i \cong \text{Div}_1(I^{i-1}) \oplus \text{Aug}_1(I^i)$. Supposons qu'il y a $J(2n) \subset \text{Aug}_1(I^{i-1})$, $J(m) \subset \text{Aug}_1(I^i)$ et $J(n) \subset \text{Aug}_1(I^{i+1})$ et des flèches entre eux $f_{i-1} : J(2n) \rightarrow J(m)$, $f_i : J(m) \rightarrow J(n)$ telles que

$$f_i \circ f_{i-1} = \bullet(Sq^n + \sum_{e(I) < n} Sq^I)$$



En appliquant l'algorithme BG, l'identité

$$\text{Div}_1(I^{i-1}) \supset J(n) \longrightarrow J(n) \subset \text{Aug}_1(I^{i+1})$$

va apparaître dans la résolution injective (J^i) de ΣM . Donc on peut remplacer J^i et J^{i+1} par $J^i / J(n)$ et $J^{i+1} / J(n)$ respectivement pour avoir une résolution plus fine de ΣM . Après avoir éliminé toutes les annulations, on obtient une résolution injective minimale de ΣM .

Démonstration. Le lemme découle de la remarque suivante.

On note $P := \bigoplus_i J(p_i)$, $Q := \bigoplus_j J(q_j)$ et $R := \bigoplus_k J(r_k)$. On désigne par

$$\partial_{PQ} := \begin{matrix} & J(p_1) & J(p_2) & \dots \\ J(q_1) & \left(\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \dots \\ a_{21} & a_{22} & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \dots \end{matrix} \right) \\ J(q_2) & \\ \vdots & \end{matrix}$$

$$\partial_{QR} := \begin{matrix} & J(q_1) & J(q_2) & \dots \\ J(r_1) & \left(\begin{matrix} b_{11} & b_{12} & \dots \\ b_{21} & b_{22} & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \dots \end{matrix} \right) \\ J(r_2) & \\ \vdots & \end{matrix}$$

les morphismes $P \rightarrow Q$ et $Q \rightarrow R$ respectivement. Le composé $\partial_{QR} \circ \partial_{PQ}$ sera noté :

$$\partial_{PR} := \begin{matrix} & J(p_1) & J(p_2) & \dots \\ J(r_1) & \left(\begin{matrix} c_{11} & c_{12} & \dots \\ c_{21} & c_{22} & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \dots \end{matrix} \right) \\ J(r_2) & \\ \vdots & \end{matrix}$$

Si on suppose que ce composé est nul, alors si les morphismes c_{ij} ne sont pas triviaux, ils doivent être de la forme :

$$c_{ij} = \bullet \left(\sum_{I \in \Gamma} S q^I \right), e(I) > r_i, \forall I \in \Gamma.$$

Si on remplace les modules P, Q, R par $\text{Aug}_1(P), \text{Aug}_1(Q), \text{Aug}_1(R)$, les matrices elles mêmes ne sont pas changées. Cependant, la matrice composée

$$\partial_{\text{Aug}_1(P)\text{Aug}_1(R)} := \begin{matrix} & J(1+p_1) & J(1+p_2) & \dots \\ J(1+r_1) & \left(\begin{matrix} c_{11} & c_{12} & \dots \\ c_{21} & c_{22} & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \dots \end{matrix} \right) \\ J(1+r_2) & \\ \vdots & \end{matrix} : \text{Aug}_1(P) \rightarrow \text{Aug}_1(R)$$

peut devenir non-nulle. Cela provient du fait que dans certains éléments $c_{ij} = \bullet \left(\sum_{I \in \Gamma} S q^I \right)$, il y a des multi-indices I dont l'excès $e(I) = 1 + r_i$. En particulier, si $I = 1 + r_i$ alors $1 + p_j = 2(1 + r_i)$ et il s'ensuit que le morphisme $\text{Aug}_1(J(p_j)) \xrightarrow{\bullet S q^{1+r_i}} \text{Aug}_1(J(r_i))$ devient non-trivial donc d'après le lemme 1.5.0.24, il existe le morphisme identité $\text{Div}_1(\text{Aug}_1(J(p_j))) \xrightarrow{id} \text{Aug}_1(J(r_i))$. Il résulte que le module $\text{Div}_1(J(1 + p_j))$, venant de naître après avoir appliqué l'algorithme BG, sera utilisé pour éliminer le module $J(1 + r_i)$. Le lemme en découle. \square

Notation 3.1.1.9. Soit $\{I^i \mid 0 \leq i \leq n-1\}$ une résolution injective minimale de $\Sigma^n \mathbb{F}_2$. Soit $J(k) \subset I^j$. La somme de tout composé $\bullet \theta_{\alpha_2} \theta_{\alpha_1} : J(k_1) \rightarrow J(k)$:

$$J(k_1) \xrightarrow{\bullet \theta_{\alpha_2}} J(k_\alpha) \xrightarrow{\bullet \theta_{\alpha_1}} J(k)$$

ou $J(k_1) \in I^{j-2}$ et $J(k_\alpha) \in I^{j-1}$ sera dite une relation entre $J(k_1)$ et $J(k)$. Soit t un entier. Cette relation est dite t -bonne si

$$\sum_{\alpha} \theta_{\alpha_2} \theta_{\alpha_1} = Sq^{k+t} + \sum_{\substack{J \text{ est admissible,} \\ e(J) < k+t}} Sq^J.$$

Remarque 3.1.1.10. Les modules de Brown-Gitler dans $\text{Aug}_1(I_i)$ ne peuvent s'annuler que par les modules qui viennent de $\text{Div}_1(I_{i-2})$. D'après le lemme d'annulation, si il existe une t -bonne relation entre $J(k_1)$ et $J(k)$ alors le module $\text{Aug}_t(J(k))$ sera tué dans la résolution $\text{BG}^t(\{I^i\})$ de $\Sigma^{n+t}\mathbb{F}_2$ par le module $\text{Div}(\text{Aug}_n(J(k_1)))$.

3.1.1.3 La technologie de Maple

Afin de faciliter les calculs, on a écrit un module de Maple pour calculer la résolution injective minimale de $\Sigma^n \mathbb{F}_2$. Le code de cette procédure sera donné dans les annexes. On explique dans ce paragraphe comment décoder la sortie de la procédure.

Définition 3.1.1.11. Soient $M = \bigoplus_{i=1}^k J(n_i)$, $N = \bigoplus_{j=1}^l J(m_j)$ et

$$A = \{a_{ji} : J(n_i) \rightarrow J(m_j) \mid j = 1, 2, \dots, l, i = 1, 2, \dots, k\}$$

la matrice de morphismes entre M et N . Toutes ces données seront codées dans la matrice suivante :

n_1 \vdots n_k	${}^t A$
0	m_1 m_l

Les morphismes $a_{ij} = \bullet \left(\sum_I Sq^I \right)$ seront désignés par $\sum_I s(I)$.

Notation 3.1.1.12. La résolution injective minimale de $\Sigma^n \mathbb{F}_2$ est appelée par la commande $\text{BG}(n)$. Elle est représentée sous forme d'un tableau de $n-1$ matrices. Chaque matrice est obtenue en remplaçant M, N dans la définition 3.1.1.11 par deux modules consécutifs de la résolution, et A par la différentielle entre eux.

Exemple 3.1.1.13. On donne ci-dessous la sortie de $BG(8)$:

I^0

8	$s(1)$	$s(2)$	$s(4)$
0	7	6	4

 I^1

7	$s(1)$	$s(2, 1)$	0
6	0	$s(2)$	$s(3)$
4	0	0	$s(1)$
0	6	4	3

 I^2

I^2

6	$s(1)$	0
4	0	$s(2)$
3	0	$s(1)$
0	5	2

 I^3

I^3

5	$s(1)$
2	0
0	4

 I^4

I^4

4	$s(1)$	$s(2)$
0	3	2

 I^5

I^5

3	$s(1)$
2	0
0	2

 I^6

I^6

2	$s(1)$
0	1

 I^7

Notation 3.1.1.14. Un complexe \mathcal{C} est appelé complexe de Brown-Gitler si il est acyclique et chaque élément du complexe est une somme directe des modules de Brown-Gitler. Il est dit fini si chaque élément est une somme finie.

1. On note $BG(\mathcal{C})$ le complexe obtenu après avoir appliqué l'algorithme BG à \mathcal{C} .
2. On note $BGA(\mathcal{C})$ le complexe obtenu après avoir appliqué l'annulation à $BG(\mathcal{C})$.
3. Si $\mathcal{C} : C^0 \xrightarrow{\partial^0} C^1 \xrightarrow{\partial^1} C^2 \xrightarrow{\partial^2} \dots \xrightarrow{\partial^{n-1}} C^n$ est fini de longueur $n + 1$, on note $l(\mathcal{C}) = n + 1$ sa longueur.

Corollaire 3.1.1.15. L'algorithme BG commute avec la somme directe finie. Étant donné deux

complexes de Brown-Gitler \mathcal{C} et \mathcal{D} on a

$$\mathrm{BG}(\mathcal{C} \oplus \mathcal{D}) \cong \mathrm{BG}(\mathcal{C}) \oplus \mathrm{BG}(\mathcal{D}).$$

Remarque 3.1.1.16. L'algorithme BG n'est pas fonctoriel en général. Cela provient du fait que Aug_1 n'est pas un foncteur. Après avoir appliqué Aug_1 au diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & J(9) & \xrightarrow{\bullet Sq^2} & J(7) & \longrightarrow & 0 \\ \parallel & & \bullet Sq^4 \downarrow & & \downarrow \bullet Sq^3 & & \parallel \\ 0 & \longrightarrow & J(5) & \xrightarrow{\bullet Sq^1} & J(4) & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

on obtient le diagramme

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & J(10) & \xrightarrow{\bullet Sq^2} & J(8) & \longrightarrow & 0 \\ \parallel & & \bullet Sq^4 \downarrow & & \downarrow \bullet Sq^3 & & \parallel \\ 0 & \longrightarrow & J(6) & \xrightarrow{\bullet Sq^1} & J(5) & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

qui ne commute plus.

Cependant, on a :

Lemme 3.1.1.17. Soit $\mathcal{C} \hookrightarrow \mathcal{D}$ une injection de complexes de Brown-Gitler de longueur finie alors il existe une application $\mathrm{BG}(\mathcal{C}) \rightarrow \mathrm{BG}(\mathcal{D})$ qui est de nouveau injective.

Démonstration. Comme les modules de Brown-Gitler sont injectifs, les morphismes $\mathcal{C}^n \hookrightarrow \mathcal{D}^n$ sont scindés. Comme Aug_1 et Div_1 commutent aux sommes directes, le lemme en découle. \square

De même manière on obtient :

Lemme 3.1.1.18. Soit $0 \rightarrow \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{E} \rightarrow 0$ une suite exactes courtes de complexes de Brown-Gitler de longueur finie alors il y a une suite exacte courte

$$0 \rightarrow \mathrm{BG}(\mathcal{C}) \rightarrow \mathrm{BG}(\mathcal{D}) \rightarrow \mathrm{BG}(\mathcal{E}) \rightarrow 0.$$

On obtient donc le corollaire suivant :

Lemme 3.1.1.19. Soit $0 \rightarrow \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{E} \rightarrow 0$ une suite exactes courtes de complexes de Brown-Gitler de longueur finie alors

$$l(\mathrm{BGA}(\mathcal{D})) \leq \max \{l(\mathrm{BGA}(\mathcal{C})), l(\mathrm{BGA}(\mathcal{E}))\}.$$

Démonstration. Le lemme découle des remarques suivantes.

1. $l(\mathrm{BG}(\mathcal{D})) = \max \{l(\mathrm{BG}(\mathcal{C})), l(\mathrm{BG}(\mathcal{E}))\}.$
2. Le complexe $\mathrm{BG}(\mathcal{D})$ possède toute flèche identité des complexes $\mathrm{BG}(\mathcal{C}), \mathrm{BG}(\mathcal{E}).$

\square

Théorème 3.1.1.20. *On a*

$$\mathrm{Ext}_{\mathcal{U}}^*(\Sigma^n \mathbb{F}_2, \Sigma^m \mathcal{A}) = \bigoplus_{k=0}^{\infty} \mathrm{Ext}_{\mathcal{U}}^*(\Sigma^n \mathbb{F}_2, \Sigma^m J(k)).$$

Démonstration. Il résulte du lemme 3.1.1.2 que le module

$$\bigoplus_{k=2^{m-1}(2n-1)+1}^{\infty} \Sigma^m J(k)$$

admet une résolution injective (I_j, ∂_j) de telle que $I_j = \bigoplus_{t \in K_j} J(t)$ où $t > n$ pour tout $t \in K_j$. On en déduit :

$$\mathrm{Ext}_{\mathcal{U}}^*\left(\Sigma^n \mathbb{F}_2, \bigoplus_{k=2^{m-1}(2n-1)+1}^{\infty} \Sigma^m J(k)\right) = 0.$$

Notant $\alpha = 2^{m-1}(2n-1)$, on a donc :

$$\begin{aligned} \mathrm{Ext}_{\mathcal{U}}^*(\Sigma^n \mathbb{F}_2, \Sigma^m \mathcal{A}) &= \mathrm{Ext}_{\mathcal{U}}^*\left(\Sigma^n \mathbb{F}_2, \bigoplus_{k=\alpha+1}^{\infty} \Sigma^m J(k)\right) \oplus \mathrm{Ext}_{\mathcal{U}}^*\left(\Sigma^n \mathbb{F}_2, \bigoplus_{k=0}^{\alpha} \Sigma^m J(k)\right) \\ &= \mathrm{Ext}_{\mathcal{U}}^*\left(\Sigma^n \mathbb{F}_2, \bigoplus_{k=0}^{\alpha} \Sigma^m J(k)\right) \\ &= \bigoplus_{k=0}^{\alpha} \mathrm{Ext}_{\mathcal{U}}^*(\Sigma^n \mathbb{F}_2, \Sigma^m J(k)) \\ &= \bigoplus_{k=0}^{\infty} \mathrm{Ext}_{\mathcal{U}}^*(\Sigma^n \mathbb{F}_2, \Sigma^m J(k)). \end{aligned}$$

□

Théorème 3.1.1.21. *Il y a des morphismes $\partial_n^k : \mathcal{A}^{\oplus \binom{n}{k}} \rightarrow \mathcal{A}^{\oplus \binom{n}{k+1}}$ tels que la suite*

$$0 \rightarrow \Sigma^n \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}^{\oplus \binom{n}{0}} \xrightarrow{\partial_n^0} \mathcal{A}^{\oplus \binom{n}{1}} \xrightarrow{\partial_n^1} \dots \xrightarrow{\partial_n^{n-1}} \mathcal{A}^{\oplus \binom{n}{n}} \rightarrow 0$$

soit une résolution injective de $\Sigma^n \mathcal{A}$.

Démonstration. On raisonne par récurrence. Le cas $n = 1$ a été montré dans le théorème 3.1.0.1. Supposons qu'on a montré l'existence des morphismes ∂_n^k pour tout $n < l$. On passe au cas $n = l$. Compte tenu du corollaire 3.1.0.7 et de la proposition 3.1.0.5 on a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccc} \Sigma^l \mathcal{A} & \longrightarrow & \Sigma \mathcal{A}^{\oplus \binom{l-1}{0}} & \xrightarrow{\Sigma \partial_{l-1}^0} & \Sigma \mathcal{A}^{\oplus \binom{l-1}{1}} & \xrightarrow{\Sigma \partial_{l-1}^1} \dots \xrightarrow{\Sigma \partial_{l-1}^{l-2}} & \Sigma \mathcal{A}^{\oplus \binom{l-1}{l-1}} \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ & & \mathcal{A}^{\oplus \binom{l-1}{0}} & \xrightarrow{\tilde{\Sigma}^{-1}(\partial_{l-1}^0)} & \mathcal{A}^{\oplus \binom{l-1}{1}} & \xrightarrow{\tilde{\Sigma}^{-1}(\partial_{l-1}^1)} \dots \xrightarrow{\tilde{\Sigma}^{-1}(\partial_{l-1}^{l-2})} & \mathcal{A}^{\oplus \binom{l-1}{l-1}} \\ & & \downarrow d^0 & & \downarrow d^1 & & \downarrow d^{l-1} \\ & & \mathcal{A}^{\oplus \binom{l-1}{0}} & \xrightarrow{\tilde{\Phi}(\partial_{l-1}^0)} & \mathcal{A}^{\oplus \binom{l-1}{1}} & \xrightarrow{\tilde{\Phi}(\partial_{l-1}^1)} \dots \xrightarrow{\tilde{\Phi}(\partial_{l-1}^{l-2})} & \mathcal{A}^{\oplus \binom{l-1}{l-1}} \end{array}$$

d^i désignant la matrice diagonale $\text{diag} \{ \omega_0, \omega_0, \dots, \omega_0 \} \in \text{Mat}_{\binom{l-1}{i}}$. D'après le lemme 1.5.0.24 on obtient des morphismes $m^i : \mathcal{A}^{\oplus \binom{l-1}{i}} \rightarrow \mathcal{A}^{\oplus \binom{l-1}{i+2}}$ qui rendent commutatif le diagramme

$$\begin{array}{ccccccc}
 \mathcal{A}^{\oplus \binom{l-1}{0}} & \xrightarrow{\tilde{\Sigma}^{-1}(\partial_{l-1}^0)} & \mathcal{A}^{\oplus \binom{l-1}{1}} & \xrightarrow{\tilde{\Sigma}^{-1}(\partial_{l-1}^1)} & \mathcal{A}^{\oplus \binom{l-1}{2}} & \xrightarrow{\tilde{\Sigma}^{-1}(\partial_{l-1}^2)} & \dots \\
 \downarrow d^0 & & \downarrow d^1 & & \downarrow d^2 & & \\
 \mathcal{A}^{\oplus \binom{l-1}{0}} & \xrightarrow{\tilde{\Phi}(\partial_{l-1}^0)} & \mathcal{A}^{\oplus \binom{l-1}{1}} & \xrightarrow{\tilde{\Phi}(\partial_{l-1}^1)} & \mathcal{A}^{\oplus \binom{l-1}{2}} & \xrightarrow{\tilde{\Sigma}^{-1}(\partial_{l-1}^2)} & \dots \\
 & \nearrow m^0 & & \nearrow m^1 & & &
 \end{array}$$

et les morphismes induits $\partial_l^i = \begin{pmatrix} \tilde{\Phi}(\partial_{l-1}^{i-1}) & d^i \\ m^i & \tilde{\Sigma}^{-1}(\partial_{l-1}^i) \end{pmatrix}$ sont les différentielles d'une résolution injective de $\Sigma^l \mathcal{A}$

$$\mathcal{A}^{\oplus \binom{l}{0}} \xrightarrow{\partial_l^0} \mathcal{A}^{\oplus \binom{l}{1}} \xrightarrow{\partial_l^1} \dots \xrightarrow{\partial_l^{l-1}} \mathcal{A}^{\oplus \binom{l}{l}} \rightarrow 0.$$

□

A partir de la preuve du théorème 3.1.1.21 on obtient :

Proposition 3.1.1.22. *Pour tout $n \geq 1$ on a*

$$\partial_n^0 = (\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_{n-1})^t, \partial_n^{n-1} = (0, 0, \dots, 0, \omega_0).$$

De plus, ∂_n^i est une matrice telle que chaque coefficient est l'un des morphismes ω_j avec $j \leq n-i-1$ et $\partial_n^k = 0$ dès que $k \geq n$.

Théorème 3.1.1.23. *Pour tous entier $k > n-i$ on a*

$$\text{Ext}_{\mathcal{U}}^i(\Sigma^k \mathbb{F}_2, \Sigma^n \mathcal{A}) = \mathbb{F}_2^{\oplus \binom{n}{i}}.$$

Démonstration. L'inégalité $k > n-i$ entraîne que les morphismes $\partial_n^{i-1}, \partial_n^i$ sont formés des morphismes ω_m tel que $m > k$. Il résulte du lemme 3.1.0.6 que

$$\text{Hom}_{\mathcal{U}}(\Sigma^k \mathbb{F}_2, \partial_n^i) = 0 = \text{Hom}_{\mathcal{U}}(\Sigma^k \mathbb{F}_2, \partial_n^{i-1}).$$

Par définition on obtient $\text{Ext}_{\mathcal{U}}^i(\Sigma^k \mathbb{F}_2, \Sigma^n \mathcal{A}) = \text{Hom}_{\mathcal{U}}(\Sigma^k \mathbb{F}_2, \mathcal{A}^{\oplus \binom{n}{i}}) = \mathbb{F}_2^{\oplus \binom{n}{i}}$. □

Combiné avec ce théorème, le corollaire 3.1.1.2 permet d'énoncer :

Théorème 3.1.1.24. *Si $n > 2^{d-1}(2d-3)$, en itérant l'algorithme BG sur la résolution injective $J(n+1) \rightarrow J\left(\frac{n+1}{2}\right)$ de $\Sigma J(n)$ on obtient la résolution injective minimale de $\Sigma^d J(n)$.*

Démonstration. On constate que $\text{BG}^d \left(J(n+1) \xrightarrow{\bullet Sq^{\frac{n+1}{2}}} J\left(\frac{n+1}{2}\right) \right)$ est un sous-complexe de la résolution

$$0 \rightarrow \mathcal{A}^{\oplus \binom{d}{0}} \xrightarrow{\partial_d^0} \mathcal{A}^{\oplus \binom{d}{1}} \xrightarrow{\partial_d^1} \dots \xrightarrow{\partial_d^{d-1}} \mathcal{A}^{\oplus \binom{d}{d}} \rightarrow 0 \quad (3.1.5)$$

de $\Sigma^d \mathcal{A}$ (voir 3.1.1.21).

On donne dans la suite une explication explicite de la signification du théorème 3.1.1.23, nécessaire pour avancer dans la preuve. Soit n un entier. On désigne par le point (i, k) sur le plan cartésien le groupe $\text{Ext}_{\mathcal{U}}^i(\Sigma^k \mathbb{F}_2, \Sigma^n \mathcal{A})$. Les points $\text{Ext}_{\mathcal{U}}^i(\Sigma^{n-i} \mathbb{F}_2, \Sigma^n \mathcal{A})$ se trouvent sur la ligne $x + y = n$. Le théorème 3.1.1.23 signifie que si le groupe $\text{Ext}_{\mathcal{U}}^i(\Sigma^k \mathbb{F}_2, \Sigma^n \mathcal{A})$ se localise au dessus² de la ligne $x + y = n$ alors, la dimension sur \mathbb{F}_2 de ce groupe est le nombre de copies de \mathcal{A} dans le terme i -ème de la résolution 3.1.5. Comme le module \mathcal{A} contient une seule copie de $J(k)$, alors la dimension de $\text{Ext}_{\mathcal{U}}^i(\Sigma^k \mathbb{F}_2, \Sigma^n \mathcal{A})$ est aussi le nombre de copie de $J(k)$ dans la résolution 3.1.5. Il s'ensuit que la résolution 3.1.5 admet aucune flèche identité dans la zone au dessus de la ligne $x + y = n$. Ici, par abus de notation, on désigne par le point (i, k) les facteurs $J(k)$ dans le terme i -ème de la résolution 3.1.5. L'inégalité $n > 2^{d-1}(2d - 3)$ assurer que la résolution $\text{BG}^d \left(J(n+1) \xrightarrow{\bullet Sq^{\frac{n+1}{2}}} J\left(\frac{n+1}{2}\right) \right)$ de $\Sigma^d J(n)$ se situe au dessus de la ligne $x + y = n$. Il en découle que cette résolution admet aucune flèche identité donc est minimale. \square

On donne dans la suite des calculs faciles.

Proposition 3.1.1.25. *Pour tout entier n on a*

$$\text{Ext}_{\mathcal{U}}^i(\Sigma \mathbb{F}_2, \Sigma^n \mathcal{A}) = \begin{cases} \mathbb{F}_2 & \text{si } n = i, i + 1, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Démonstration. On constate que $\text{Ext}_{\mathcal{U}}^i(\Sigma \mathbb{F}_2, \Sigma^n \mathcal{A}) = 0$ pour tout $i > n$. Pour $i \leq n$ il résulte du théorème 3.1.1.21 qu'on a

$$\begin{aligned} \text{Ext}_{\mathcal{U}}^i(\Sigma \mathbb{F}_2, \Sigma^n \mathcal{A}) &\cong \begin{cases} \mathbb{F}_2 & \text{si } n = 1, i = 0, 1 \\ \text{Ext}_{\mathcal{U}}^{i-1}(\Sigma \mathbb{F}_2, \Sigma^{n-1} \mathcal{A}) \oplus \text{Ext}_{\mathcal{U}}^i(\mathbb{F}_2, \Sigma^{n-1} \mathcal{A}) & \text{sinon.} \end{cases} \\ &\cong \begin{cases} \mathbb{F}_2 & \text{si } n = 1, i = 0, 1 \\ \text{Hom}_{\mathcal{U}}(\Sigma \mathbb{F}_2, \Sigma^{n-i} \mathcal{A}) & \text{sinon.} \end{cases} \\ &\cong \begin{cases} \mathbb{F}_2 & \text{si } n \leq i + 1, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \\ &\cong \begin{cases} \mathbb{F}_2 & \text{si } n = i, i + 1, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \end{aligned}$$

\square

Proposition 3.1.1.26. *Pour tout entier n on a*

$$\text{Ext}_{\mathcal{U}}^i(\Sigma^2 \mathbb{F}_2, \Sigma^n \mathcal{A}) = \begin{cases} \text{Ext}_{\mathcal{U}}^{i-1}(\Sigma^3 \mathbb{F}_2, \Sigma^{n-1} \mathcal{A}) \oplus \mathbb{F}_2 & \text{si } n = i, \\ \text{Ext}_{\mathcal{U}}^{i-1}(\Sigma^3 \mathbb{F}_2, \Sigma^{n-1} \mathcal{A}) & \text{sinon.} \end{cases}$$

Démonstration. Il résulte du théorème 3.1.1.21 qu'on a

$$\text{Ext}_{\mathcal{U}}^i(\Sigma^2 \mathbb{F}_2, \Sigma^n \mathcal{A}) = \text{Ext}_{\mathcal{U}}^{i-1}(\Sigma^3 \mathbb{F}_2, \Sigma^{n-1} \mathcal{A}) \oplus \text{Ext}_{\mathcal{U}}^{i-1}(\Sigma \mathbb{F}_2, \Sigma^{n-1} \mathcal{A}).$$

2. C'est à dire chaque facteur $J(n)$ des termes de la résolution se localise au dessus de la ligne $x + y = n$.

Ceci, joint à la proposition 3.1.1.25 donne le résultat. □

Lemme 3.1.1.27 (Lemme de stabilisation). *Pour tous $j \leq n$ et $m \leq n - j$ on a*

$$\mathrm{Ext}_{\mathcal{U}}^j \left(\Sigma^{m+t} \mathbb{F}_2, \Sigma^{n+t} \mathbb{F}_2 \right) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ext}_{\mathcal{U}}^j \left(\Sigma^{m+t+1} \mathbb{F}_2, \Sigma^{n+t+1} \mathbb{F}_2 \right)$$

pour $t \geq n - m - j + 2$.

Démonstration. On note

$$0 \rightarrow \Sigma^n \mathbb{F}_2 \rightarrow I_n^0 \rightarrow I_n^1 \rightarrow \cdots \rightarrow I_n^{n-1} \rightarrow 0$$

la résolution injective minimale de $\Sigma^n \mathbb{F}_2$. On constate que I_n^j est une somme directe de $J(n - j)$ avec une certaine somme directe de modules $J(k)$ où $k < n - j$. Pour $t \geq n - m - j + 2$ on a $m + t > \frac{n-j+t+1}{2}$ donc les facteurs directs $J(m + j)$ dans I_{n+t}^j ne peuvent plus ni s'annuler ni s'ajouter. Le lemme en résulte. □

Lemme 3.1.1.28. *On a*

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{U}} (\Sigma^n M, J(n + t)) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{U}} (M, J(t)).$$

Ce lemme, joint au lemme de stabilisation, permet d'énoncer :

Théorème 3.1.1.29. *Pour tous $j \leq n$ et $m \leq n - j$ on a*

$$\mathrm{Ext}_{\mathcal{U}}^j \left(\Sigma^{m+t} M, \Sigma^{n+t} \mathbb{F}_2 \right) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ext}_{\mathcal{U}}^j \left(\Sigma^{m+t+1} M, \Sigma^{n+t+1} \mathbb{F}_2 \right)$$

M notant un module instable, pour $t \geq n - m - j + 2$.

3.2 La résolution injective minimale de $\Sigma^n \mathbb{F}_2$

3.2.1 La suite de l'homomorphisme de Bockstein

On commence la section avec une remarque facile que l'homomorphisme de Bockstein Sq^1 fait de la suite $(J_{\bullet}, \bullet Sq^1)$:

$$\cdots \xrightarrow{\bullet Sq^1} J_n \xrightarrow{\bullet Sq^1} J_{n-1} \xrightarrow{\bullet Sq^1} J_{n-2} \xrightarrow{\bullet Sq^1} \cdots \xrightarrow{\bullet Sq^1} J_2 \xrightarrow{\bullet Sq^1} J_1 \rightarrow 0$$

un complexe, J_n notant le module $J(n + 1)$. L'homologie de ce complexe se calcul grâce au lemme suivant.

Lemme 3.2.1.1. *On a :*

$$H_k \left(J_{\bullet}, \bullet Sq^1 \right) = \begin{cases} J(2l) & \text{si } k = 4l - 1, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Par conséquent, on obtient la suite exacte longue :

$$\cdots \xrightarrow{\beta_{i+1}} \mathcal{B}_i \xrightarrow{\beta_i} \mathcal{B}_{i-1} \xrightarrow{\beta_{i-1}} \mathcal{B}_{i-2} \xrightarrow{\beta_{i-2}} \cdots \xrightarrow{\beta_3} \mathcal{B}_2 \xrightarrow{\beta_2} \mathcal{B}_1 \rightarrow 0$$

avec :

$$\mathcal{B}_i = \begin{cases} J(i) & \text{si } i = 4k, 4k+1, 4k+2, \\ J(4k+3) \oplus J(2k+2) & \text{si } i = 4k+3. \end{cases}$$

$$\beta_i = \begin{cases} \bullet Sq^1 & \text{si } i = 4k+1, 4k+2, 4k+3, \\ (\bullet Sq^1, \bullet Sq^{2k})^t & \text{si } i = 4k. \end{cases}$$

Démonstration. On constate que la suite

$$J(3) \xrightarrow{\bullet Sq^1} J(2) \xrightarrow{\bullet Sq^1} J(1) \rightarrow 0$$

est exacte. On raisonne par récurrence sur k . Supposons qu'on a montré le lemme pour $k < n$. On passe au cas $k = n$. Le diagramme suivant est commutatif

$$\begin{array}{ccccccc} & & 0 & & 0 & & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \cdots & \xrightarrow{\Sigma(\bullet Sq^1)} & \Sigma J(n+1) & \xrightarrow{\Sigma(\bullet Sq^1)} & \Sigma J(n) & \xrightarrow{\Sigma(\bullet Sq^1)} & \Sigma J(n-1) \xrightarrow{\Sigma(\bullet Sq^1)} \cdots \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \cdots & \xrightarrow{\bullet Sq^1} & J(n+2) & \xrightarrow{\bullet Sq^1} & J(n+1) & \xrightarrow{\bullet Sq^1} & J(n) \xrightarrow{\bullet Sq^1} \cdots \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \cdots & \xrightarrow{0} & J\left(\frac{n+2}{2}\right) & \xrightarrow{0} & J\left(\frac{n+1}{2}\right) & \xrightarrow{0} & J\left(\frac{n}{2}\right) \xrightarrow{0} \cdots \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ & & 0 & & 0 & & 0 \end{array}$$

Comme chaque colonne est une suite exacte courte, on obtient donc la suite exacte longue

$$\cdots \longrightarrow J\left(\frac{n+2}{2}\right) \longrightarrow H_{n-1}(\Sigma J_\bullet, \bullet Sq^1) \longrightarrow H_n(J_\bullet, \bullet Sq^1) \longrightarrow J\left(\frac{n+1}{2}\right) \longrightarrow \cdots \quad (3.2.1)$$

Comme le foncteur Σ est exact, on a l'isomorphisme

$$H_{n-1}(\Sigma J_\bullet, \bullet Sq^1) \cong \Sigma H_{n-1}(J_\bullet, \bullet Sq^1).$$

1. Pour $n = 4l$ et $l \geq 1$, la suite 3.2.1 est reformulée

$$\cdots \rightarrow J(2l+1) \xrightarrow{\partial} \Sigma J(2l) \rightarrow H_{4l}(J_\bullet, \bullet Sq^1) \rightarrow 0. \quad (3.2.2)$$

Parce que, d'une part

$$J(2l+1) \cong \Sigma J(2l),$$

et d'autre part

$$\text{Hom}_{\mathcal{U}}(J(2l+1), J(2l+1)) \cong \mathbb{F}_2,$$

alors il n'y a que deux options pour ∂ : soit l'identité de $J(2l+1)$, soit le morphisme nul. Supposons par absurde que $\partial = 0$. Compte tenu de l'exactitude de la suite 3.2.2, on obtient

l'isomorphisme

$$H_{4l}(J_\bullet, \bullet Sq^1) \cong J(2l+1).$$

Notant $2^{k_1} + 2^{k_2} + \dots + 2^{k_m}$ l'expression 2-adique de l , alors les modules $J(2l+1)$, $J(4k+1)$ et $J(4k+2)$ sont m -connexes et :

$$\begin{aligned} (J(2k+1))^{m+1} &\cong \langle x_{1+k_1} \cdot x_{1+k_2} \cdots x_{1+k_m} \cdot x_0 \rangle, \\ (J(4k+1))^{m+1} &\cong \langle x_{2+k_1} \cdot x_{2+k_2} \cdots x_{2+k_m} \cdot x_0 \rangle, \\ (J(4k+2))^{m+1} &\cong \langle x_{2+k_1} \cdot x_{2+k_2} \cdots x_{2+k_m} \cdot x_1 \rangle. \end{aligned}$$

Il résulte de l'égalité

$$\bullet Sq^1(x_{2+k_1} \cdot x_{2+k_2} \cdots x_{2+k_m} \cdot x_1) = x_{2+k_1} \cdot x_{2+k_2} \cdots x_{2+k_m} \cdot x_0$$

que l'on a

$$0 = H_{4l}^{m+1}(J_\bullet, \bullet Sq^1) = (J(2k+1))^{m+1} \cong \mathbb{F}_2.$$

Cette contradiction montre que ∂ est le morphisme identité et donc $H_{4l}(J_\bullet, \bullet Sq^1) = 0$.

2. Pour $n = 4l + 1$ et $l \geq 1$, on a la suite exacte courte

$$0 \rightarrow H_{4l+1}(J_\bullet, \bullet Sq^1) \rightarrow J(2l+1) \rightarrow J(2l+1) \rightarrow 0.$$

Le morphisme $J(2l+1) \rightarrow J(2l+1)$ est surjectif donc bijectif. On en déduit :

$$H_{4l+1}(J_\bullet, \bullet Sq^1) = 0.$$

3. Pour $n = 4l + 2$ et $l \geq 1$, la suite 3.2.1 devient

$$0 \rightarrow H_{4l+2}(J_\bullet, \bullet Sq^1) \rightarrow J\left(\frac{4l+3}{2}\right) = 0$$

donc

$$H_{4l+2}(J_\bullet, \bullet Sq^1) = 0.$$

4. Pour $n = 4l + 3$ et $l \geq 1$, la suite exacte courte

$$0 \rightarrow H_{4l+3}(J_\bullet, \bullet Sq^1) \rightarrow J(2l+2) \rightarrow 0$$

implique

$$H_{4l+3}(J_\bullet, \bullet Sq^1) \cong J(2l+2).$$

Afin de terminer la preuve, il faut montrer que la suite

$$J(4k+1) \xrightarrow{\bullet Sq^1} J(4k) \xrightarrow{(\bullet Sq^1, \bullet Sq^{2k})^t} J(4k-1) \oplus J(2k) \xrightarrow{(\bullet Sq^1, 0)} J(4k-2)$$

est exacte. En effet, le diagramme suivant est commutatif tel que les colonnes sont des suites

exactes courtes.

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & & 0 & & 0 & & 0 \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 \Sigma J(4k) & \xrightarrow{\Sigma(\bullet Sq^1)} & \Sigma J(4k-1) & \xrightarrow{\Sigma(\bullet Sq^1, Sq^{2k})^t} & \Sigma J(4k-2) \oplus \Sigma J(2k-1) & \xrightarrow{\Sigma(\bullet Sq^1, 0)} & \Sigma J(4k-3) \\
 \downarrow \sigma_{4k} & & \downarrow \sigma_{4k-1} & & \downarrow \begin{pmatrix} 0 & \sigma_{2k-1} \\ \sigma_{4k-2} & 0 \end{pmatrix} & & \downarrow \sigma_{4k-3} \\
 J(4k+1) & \xrightarrow{\bullet Sq^1} & J(4k) & \xrightarrow{(\bullet Sq^1, Sq^{2k})^t} & J(4k-1) \oplus J(2k) & \xrightarrow{(\bullet Sq^1, 0)} & J(4k-2) \\
 \downarrow & & \downarrow \bullet Sq^{2k} & & \downarrow (0, \bullet Sq^k) & & \downarrow \bullet Sq^{2k-1} \\
 0 & \xrightarrow{0} & J(2k) & \xrightarrow{\bullet Sq^k} & J(k) & \xrightarrow{0} & J(2k-1) \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & & 0 & & 0 & & 0
 \end{array}$$

Comme le morphisme $\bullet Sq^{2k} : J(4k-1) \rightarrow J(2k-1)$ est trivial et le foncteur Σ est exact, l'homologie du complexe

$$\Sigma J(4k) \xrightarrow{\Sigma(\bullet Sq^1)} \Sigma J(4k-1) \xrightarrow{\Sigma(\bullet Sq^1, \bullet Sq^{2k})^t} \Sigma J(4k-2) \oplus \Sigma J(2k-1)$$

est isomorphe à celle du complexe

$$\Sigma J(4k) \xrightarrow{\Sigma(\bullet Sq^1)} \Sigma J(4k-1) \xrightarrow{\Sigma(\bullet Sq^1)} \Sigma J(4k-2)$$

donc est isomorphe à $\Sigma H^{4k-1}(J_\bullet, \bullet Sq^1) = 0$. De même manière, l'homologie du complexe

$$\Sigma J(4k-1) \xrightarrow{\Sigma(\bullet Sq^1, \bullet Sq^{2k})^t} \Sigma J(4k-2) \oplus \Sigma J(2k-1) \xrightarrow{\Sigma(\bullet Sq^1, 0)} \Sigma J(4k-3)$$

est isomorphe à la somme directe de celle du complexe

$$\Sigma J(4k-1) \xrightarrow{\Sigma(\bullet Sq^1)} \Sigma J(4k-2) \xrightarrow{\Sigma(\bullet Sq^1)} \Sigma J(4k-3)$$

et le module $\Sigma J(2k-1)$ donc est isomorphe à

$$\Sigma H^{4k-2}(J_\bullet, \bullet Sq^1) \oplus \Sigma J(2k-1) \cong \Sigma J(2k-1).$$

On note H_1, H_2 les homologies du complexe

$$J(4k+1) \xrightarrow{\bullet Sq^1} J(4k) \xrightarrow{(\bullet Sq^1, \bullet Sq^{2k})^t} J(4k-1) \oplus J(2k)$$

et du complexe

$$J(4k) \xrightarrow{(\bullet Sq^1, \bullet Sq^{2k})^t} J(4k-1) \oplus J(2k) \xrightarrow{(\bullet Sq^1, 0)} J(4k-2)$$

respectivement. Comme l'homologie du complexe

$$0 \rightarrow J(2k) \xrightarrow{\bullet Sq^k} J(k)$$

est $\Sigma J(2k-1)$ et celle du complexe

$$J(2k) \xrightarrow{\bullet Sq^k} J(k) \xrightarrow{0} J(2k-1)$$

est 0, on obtient la suite exacte longue

$$0 \rightarrow H_1 \rightarrow \Sigma J(2k-1) \xrightarrow{\alpha} \Sigma J(2k-1) \xrightarrow{\alpha_1} H_2 \rightarrow 0.$$

L'élément $(0, \Sigma x_0^{2k-1}) \in \Sigma J(4k-2) \oplus \Sigma J(2k-1)$ représente la classe Σx_0^{2k-1} dans l'homologie $\Sigma J(2k-1)$ du complexe

$$\Sigma J(4k-1) \xrightarrow{\Sigma(\bullet Sq^1, \bullet Sq^{2k})^t} \Sigma J(4k-2) \oplus \Sigma J(2k-1) \xrightarrow{\Sigma(\bullet Sq^1, 0)} \Sigma J(4k-3)$$

Parce que, d'une part

$$\begin{pmatrix} 0 & \sigma_{2k-1} \\ \sigma_{4k-2} & 0 \end{pmatrix} (0, \Sigma x_0^{2k-1}) = (0, x_0^{2k}) \in J(4k-1) \oplus J(2k)$$

et d'autre part

$$(\bullet Sq^1, \bullet Sq^{2k})^t (x_1^{2k}) = (0, x_0^{2k}) \quad (3.2.3)$$

donc le morphisme $(0, x_0^{2k})$ est un cobord puis $\alpha_1 [(0, \Sigma x_0^{2k-1})] = 0$. Il s'ensuit que le morphisme α est non-trivial. Par ailleurs

$$\text{Hom}_{\mathcal{U}}(\Sigma J(2k-1), \Sigma J(2k-1)) \cong \mathbb{F}_2,$$

le seul morphisme non-trivial de $\text{Hom}_{\mathcal{U}}(\Sigma J(2k-1), \Sigma J(2k-1))$ est l'identité. Il en découle que

$$H_1 \cong H_2 \cong 0.$$

On termine la preuve en expliquant l'égalité 3.2.3. En effet, on montre que

$$\bullet Sq^1 (x_1^{2k}) = 0.$$

Le morphisme $\bullet Sq^1 : J(4k) \rightarrow J(4k-1)$ est le seule morphisme non-trivial entre $J(4k)$ et $J(4k-1)$. Par ailleurs :

$$\begin{aligned} \text{Hom}_{\mathcal{U}}(J(4k), J(4k-1)) &\cong \text{Hom}_{\mathcal{V}}((J(4k))^{4k-1}, (J(4k-1))^{4k-1}), \\ (J(4k))^{4k-1} &\cong \langle x_0^{4k-2} x_1 \rangle, \\ (J(4k-1))^{4k-1} &\cong \langle x_0^{4k-1} \rangle, \end{aligned}$$

donc :

$$\bullet Sq^1(x_0^{4k-2}x_1) = x_0^{4k-1}.$$

Supposons par absurde que $\bullet Sq^1(x_1^{2k}) \neq 0$. Comme le module $J(4k-1)$ est co-libre, il existe une opération de Steenrod θ tel que

$$\theta(\bullet Sq^1(x_1^{2k})) = x_0^{4k-1}.$$

Il s'ensuit que

$$\theta(x_1^{2k}) = x_0^{4k-2}x_1.$$

Il en résulte que

$$\begin{aligned} Sq^1\theta(x_1^{2k}) &= Sq^1(x_0^{4k-2}x_1), \\ &= x_0^{4k}, \\ &= Sq^{2k}(x_1^{2k}). \end{aligned}$$

De nouveau, comme $J(4k)$ est co-libre, alors $Sq^1\theta = Sq^{2k}$. On note

$$\theta = \sum_{(2i_1, i_2, \dots, i_k) \text{ est admissible}} Sq^{2i_1, i_2, \dots, i_k} + \sum_{(2j_1+1, j_2, \dots, j_t) \text{ est admissible}} Sq^{2j_1+1, j_2, \dots, j_t},$$

alors

$$Sq^1\theta = \sum_{(2i_1, i_2, \dots, i_k) \text{ est admissible}} Sq^{2i_1+1, i_2, \dots, i_k}.$$

Cette contradiction conclut le lemme. \square

On énonce ci-dessous un phénomène intéressant sur la saturation de la suite de Bockstein par rapport à l'algorithme BG.

Lemme 3.2.1.2. *On a*

$$\text{BGA}(\mathcal{B}_k, \beta_k)_{k \geq 1} = (\mathcal{B}_k, \beta_k)_{k \geq 1}.$$

Démonstration. En appliquant l'algorithme BG on obtient le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccc} J(4k+2) & \xrightarrow{\bullet Sq^1} & J(4k+1) & \xrightarrow{\begin{pmatrix} \bullet Sq^1 \\ \bullet Sq^{2k} \end{pmatrix}} & J(4k) \oplus J(2k+1) & \xrightarrow{(\bullet Sq^1, 0)} & J(4k-1) \\ \downarrow \bullet Sq^{2k+1} & & \downarrow 0 & \nearrow m_0 & \downarrow (\bullet Sq^{2k}, 0) & & \downarrow 0 \\ J(2k+1) & \xrightarrow{0} & 0 & \xrightarrow{0} & J(2k) & \xrightarrow{0} & 0 \end{array}$$

m_0 notant le morphisme $\begin{pmatrix} 0 \\ id \end{pmatrix}$. Le lemme d'annulation permet d'annuler les termes $J(2k+1)$ de la deuxième ligne du diagramme. Cela nous donne de nouveau la suite exacte $(\mathcal{B}_k, \beta_k)_{k \geq 1}$. \square

Théorème 3.2.1.3. *Pour tous entiers $0 \leq i \leq n-1$ et $j \geq 1$ on a*

$$\text{Ext}_{\mathcal{U}}^0(\Sigma^i \mathbb{F}_2, \Sigma^n \mathbb{F}_2) = \begin{cases} \mathbb{F}_2 & \text{si } i = n, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{Ext}_{\mathcal{U}}^i \left(\Sigma^j \mathbb{F}_2, \Sigma^n \mathbb{F}_2 \right) &= 0, \text{ si } i + j > n, \\ \text{Ext}_{\mathcal{U}}^i \left(\Sigma^j \mathbb{F}_2, \Sigma^n \mathbb{F}_2 \right) &= \mathbb{F}_2, \text{ si } i + j = n, \\ \text{Ext}_{\mathcal{U}}^{n-4k+1} \left(\Sigma^{2k} \mathbb{F}_2, \Sigma^n \mathbb{F}_2 \right) &\supset \mathbb{F}_2, \text{ si } n > 4k - 1. \end{aligned}$$

Démonstration. La suite $J(2) \xrightarrow{\bullet Sq^1} J(1)$ est la résolution injective minimale de $\Sigma^2 \mathbb{F}_2$. On a le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccccc} \cdots & \longrightarrow & \mathcal{B}_4 & \xrightarrow{\beta_4} & \mathcal{B}_3 & \xrightarrow{\beta_3} & \mathcal{B}_2 & \xrightarrow{\beta_2} & \mathcal{B}_1 & \longrightarrow & 0 \\ & & \uparrow & & \uparrow & & \parallel & & \parallel & & \\ \cdots & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & J(2) & \longrightarrow & J(1) & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Le complexe

$$(\sigma) \cdots \rightarrow 0 \rightarrow J(2) \xrightarrow{\bullet Sq^1} J(1)$$

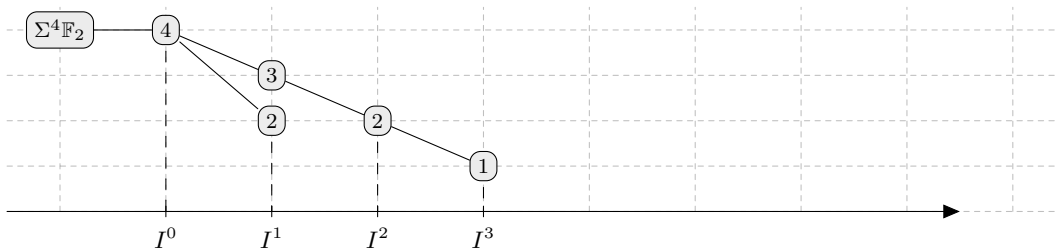
est donc un sous-complexe de la suite de Bockstein. En itérant $n - 2$ fois l'algorithme BG sur la suite $(\mathcal{B}_k, \beta_k)_{k \geq 1}$ et (σ) on obtient le complexe $(C_k, \gamma_k)_{k \geq 1}$ et la résolution $(I^i, \partial^i)_{i=n-1}^0$ de $\Sigma^n \mathbb{F}_2$ (ici on inverse l'ordre de l'indices de la résolution). D'après le lemme 3.1.1.17 on obtient une injection $\text{BG}^{n-2}(\sigma) \hookrightarrow \text{BG}^{n-2}((\mathcal{B}_k, \beta_k)_{k \geq 1})$. Après avoir appliqué le lemme d'annulation 3.1.1.8 sur la suite $(C_k, \gamma_k)_{k \geq 1}$ on retrouve la suite $(\mathcal{B}_k, \beta_k)_{k \geq 1}$. Il s'ensuit que la partie $(\mathcal{B}_k, \beta_k)_{n > k \geq 1}$ de la résolution $(I^i, \partial^i)_{i=n-1}^0$ ne peut pas s'annuler. Ceci assure le résultat. \square

D'après le théorème 3.2.1.3 on constate que la résolution injective minimale de $\Sigma^n \mathbb{F}_2$ contient une partie de la suite de l'homomorphisme de Bockstein $(\mathcal{B}_k, \beta_k)_{k \geq 1}$. Cela permet de définir la notation suivante.

Définition 3.2.1.4. On note $\tau : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ la fonction qui associe à chaque nombre entier n le plus petit indice à partir duquel la résolution injective minimale $(I_i^n, \partial_i^n)_{i=0}^{n-1}$ de $\Sigma^n \mathbb{F}_2$ commence à coïncider avec la suite $(\mathcal{B}_k, \beta_k)_k$ introduite dans le lemme 3.2.1.1 :

$$I_{\tau(n)+t}^n = \mathcal{B}_{n-\tau(n)-t} \text{ et } \partial_n^{\tau(n)+t} = \beta_{n-\tau(n)-t} \text{ pour tout } t \geq 0.$$

Exemple 3.2.1.5. La résolution injective minimale de $\Sigma^4 \mathbb{F}_2$ est présentée de manière graphique :



Alors $\tau(4) = 0$.

Dans ce qui suit on va donner une première estimation de la fonction τ .

Définition 3.2.1.6. Si J est une somme directe finie $\bigoplus_{i=1}^n J(\alpha_i)$ on note :

$$m(J) = \max \{ \alpha_i \mid 1 \leq i \leq n \}.$$

Définition 3.2.1.7. *Un complexe*

$$\dots \rightarrow M^{i-1} \rightarrow M^i \rightarrow M^{i+1} \rightarrow \dots$$

dont chaque module M^i est une somme directe finie de modules de Brown-Gitler est dit 2-bon si

$$\begin{aligned} m(M^i) - m(M^{i+1}) &\geq 2 \\ m(M^i) &\geq 2 \end{aligned}$$

pour tout i .

Le lemme suivant est direct par définition de l'algorithme BG.

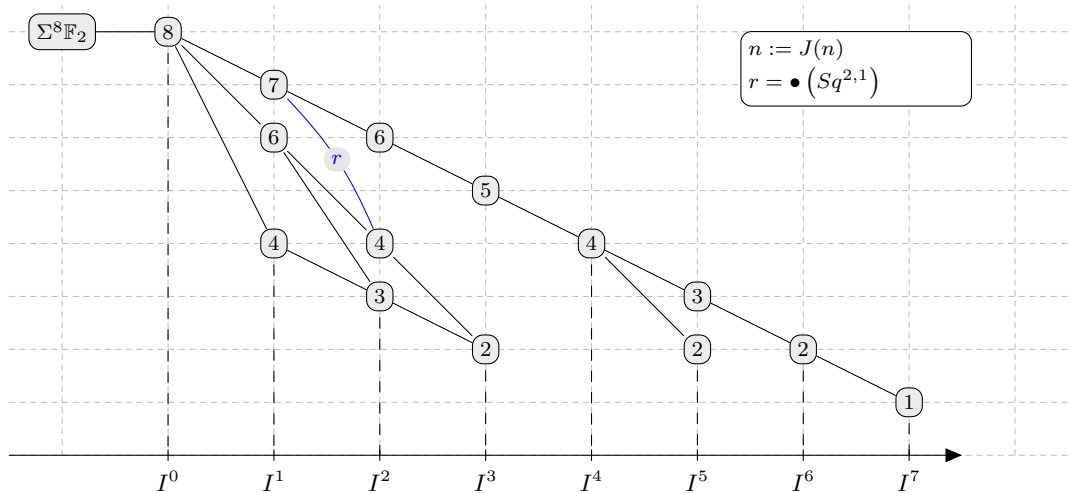
Lemme 3.2.1.8. *Étant donné*

$$(\mathcal{C}) : \dots \rightarrow M^{i-1} \rightarrow M^i \rightarrow M^{i+1} \rightarrow \dots$$

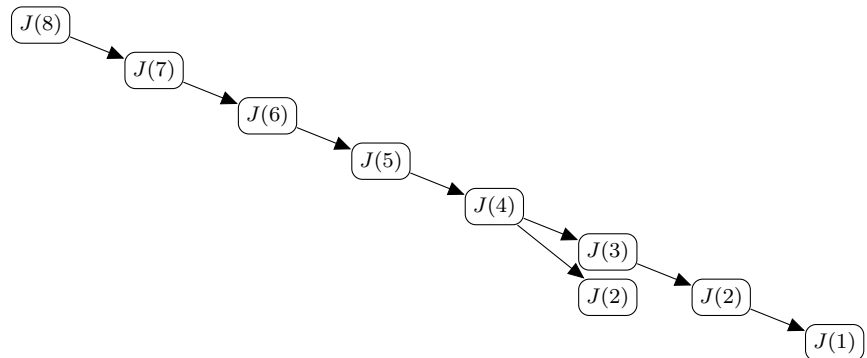
un complexe 2-bon alors il en est de même pour le complexe $\text{BG}(\mathcal{C})$.

Théorème 3.2.1.9. *La valeur $\tau(n)$ est majorée par $\left\lceil \frac{n-2}{2} \right\rceil$.*

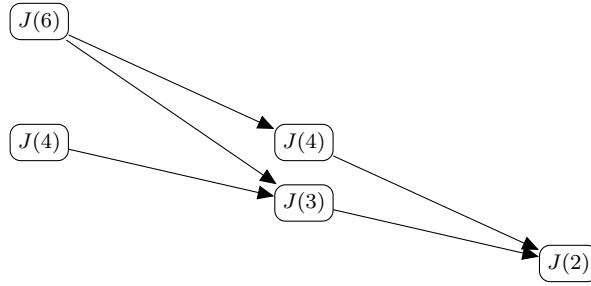
Démonstration. La représentation graphique de la résolution injective minimale de $\Sigma^8 \mathbb{F}_2$ est donnée ci-dessous (voir 3.1.1.13 pour la représentation algébrique) :



sauf mention explicite, les flèches entre les modules de Brown-Gitler $J(m) \rightarrow J(n)$ sont $\bullet Sq^{m-n}$. En appliquant l'algorithme BG combiné avec le lemme d'annulation on constate que la partie :



deviendra celle qui coïncide avec la suite $(\mathcal{B}_k, \beta_k)_{k \geq 1}$. Pour estimer la fonction τ il suffit de contrôler la partie \mathcal{D}_8 :



On remarque que cette partie \mathcal{D}_8 est 2-bonne. Pour tout $n > 8$, on note $I_{\tau(n)}^n = \mathcal{B}_{n-\tau(n)} \oplus D_{\tau(n)}$ (voir la définition 3.2.1.4). Le lemme 3.2.1.8, combiné avec le fait que $m(I_0) = m(J(n)) = n$, implique

$$n - 2\tau(n) \geq m(D_{\tau(n)}) \geq 2.$$

Cela entraîne le résultat

$$\left\lfloor \frac{n-2}{2} \right\rfloor \geq \tau(n).$$

□

On en déduit :

Théorème 3.2.1.10. *Si $i > \left\lfloor \frac{n-2}{2} \right\rfloor$ et $j \geq 1$ on a*

$$\text{Ext}_{\mathcal{U}}^i \left(\Sigma^j \mathbb{F}_2, \Sigma^n \mathbb{F}_2 \right) = \begin{cases} \mathbb{F}_2 & \text{si } i + j = n, \\ \mathbb{F}_2 & \text{si } i = 4k - 1 \text{ et } j = 2k, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Avant de donner une estimation plus fine de la fonction τ , on montre ci-dessous les premières applications de l'algorithme BG.

Exemples

Proposition 3.2.1.11. *Pour tout n on a*

$$\text{Ext}_{\mathcal{U}}^1 \left(\Sigma^{n-j} \mathbb{F}_2, \Sigma^n \mathbb{F}_2 \right) = \begin{cases} \mathbb{F}_2 & \text{si } j = 2^k, 0 \leq k \leq \log_2 n, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Démonstration. Dans la résolution injective $\{I^i | i = 0, 1, \dots, n-1\}$ de $\Sigma^n \mathbb{F}_2$, le module I^0 est l'enveloppe injective minimale de $\Sigma^n \mathbb{F}_2$ donc est $J(n)$. On démontre par récurrence sur n que

$$I^1 \cong \bigoplus_{0 \leq k \leq \lfloor \log_2 n \rfloor} J(n - 2^k). \quad (3.2.4)$$

La relation 3.2.4 a été vérifiée pour $n \leq 6$. On suppose que 3.2.4 est vraie pour tout $n < m$, on passe au cas $n = m$. En appliquant l'algorithme BG sans annulation sur la résolution injective

minimale de $\Sigma^{m-1} \mathbb{F}_2$ on obtient une résolution injective de $\Sigma^m \mathbb{F}_2$. On note $\{J^i | i = 0, 1, \dots, m\}$ cette résolution. Par définition on a $J^i \cong \text{Div}_1(I^{i-1}) \oplus \text{Aug}_1(I^i)$.

1. Si $m = 2q + 1$, on a $\text{Div}_1(I^0) = 0$. On obtient donc

$$J^1 \cong \bigoplus_{0 \leq k \leq \lfloor \log_2 m \rfloor} J(m - 2^k).$$

Puisque les opérations Sq^{2^k} sont indécomposables, il n'y a pas de morphisme identité issue de $J(m - 2^k) \subset J^1$. Il en résulte qu'il y a aucune annulation issue de J^1 .

2. Si $m = 2^{\lfloor \log_2 m \rfloor} + 2q$, on a $\text{Div}_1(I^0) = 2^{\lfloor \log_2 m \rfloor - 1} + q$. Comme

$$Sq^{2^{\lfloor \log_2 m \rfloor - 1} + q} = \bigoplus_{\substack{\varepsilon_k \in \{0,1\} \\ 0 \leq k \leq \lfloor \log_2 m \rfloor - 1 \\ |\theta_k| = 2^{\lfloor \log_2 m \rfloor - 1} + q - 2^k}} \varepsilon_k Sq^{2^k} \theta_k$$

et $J(2^{\lfloor \log_2 m \rfloor - 1} + q) \subset J^2$, il existe un morphisme identité issue de $J(2^{\lfloor \log_2 m \rfloor - 1} + q) \subset J^1$ vers $J(2^{\lfloor \log_2 m \rfloor - 1} + q) \subset J^2$. En appliquant l'annulation sur J^1 on obtient la relation voulue. \square

De même manière on obtient :

Proposition 3.2.1.12. *Pour tout n on a*

$$\text{Ext}_{\mathcal{U}}^2 \left(\Sigma^{2^n - j} \mathbb{F}_2, \Sigma^{2^n} \mathbb{F}_2 \right) = \begin{cases} \mathbb{F}_2 & \text{si } j = 2^k + 2^{k-t}, 0 \leq k \leq n-1, 2 \leq t, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

3.2.2 Estimation de la fonction τ

Afin d'avoir une estimation précise de la fonction τ on calcule d'abord des valeurs explicites de cette fonction sur certains cas concrets. Les travaux dans la suite demandent beaucoup de calculs combinatoires provenant de l'algorithme BG. On ne donne donc que les résultats nécessaires et renvoie aux appendices pour les calculs détaillés.

On obtient les valeurs de la fonction τ sur certains nombres n d'après l'algorithme BG.

Proposition 3.2.2.1. *La table suivante donne les valeurs $\tau(n)$ pour $n \leq 36$.*

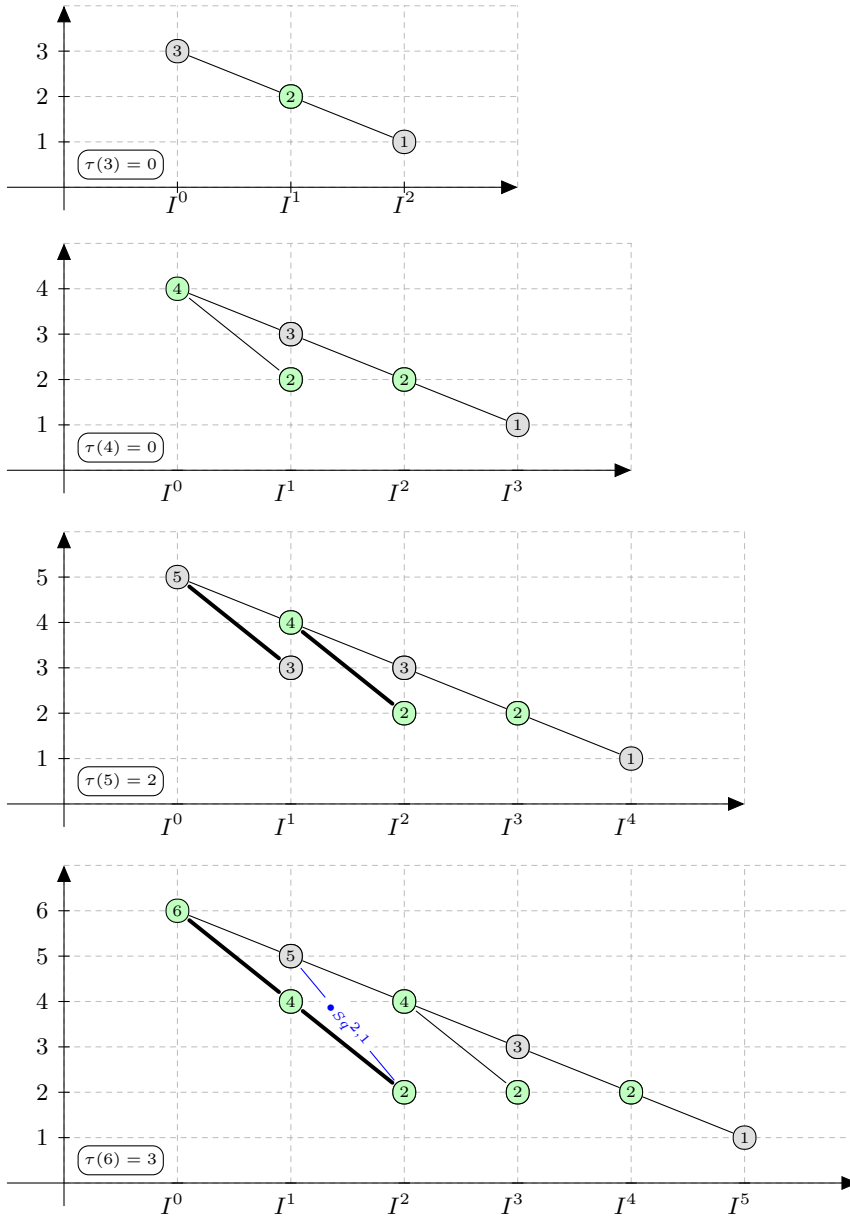
n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$\tau(n)$	0	0	0	0	2	3	3	4	4	5	5	5
n	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
$\tau(n)$	6	5	5	5	6	7	7	8	8	9	9	9
n	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36
$\tau(n)$	10	9	9	9	10	11	11	12	12	13	13	13

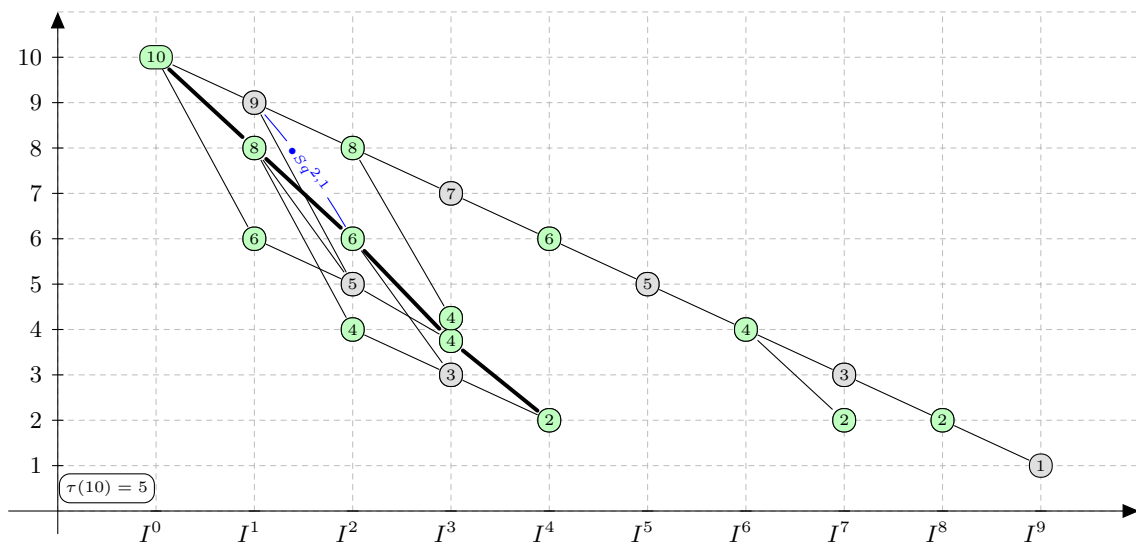
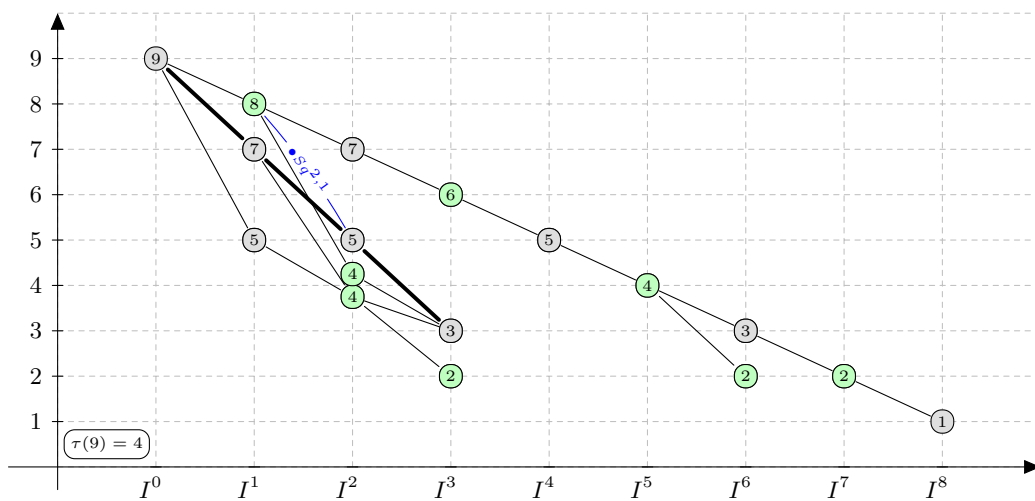
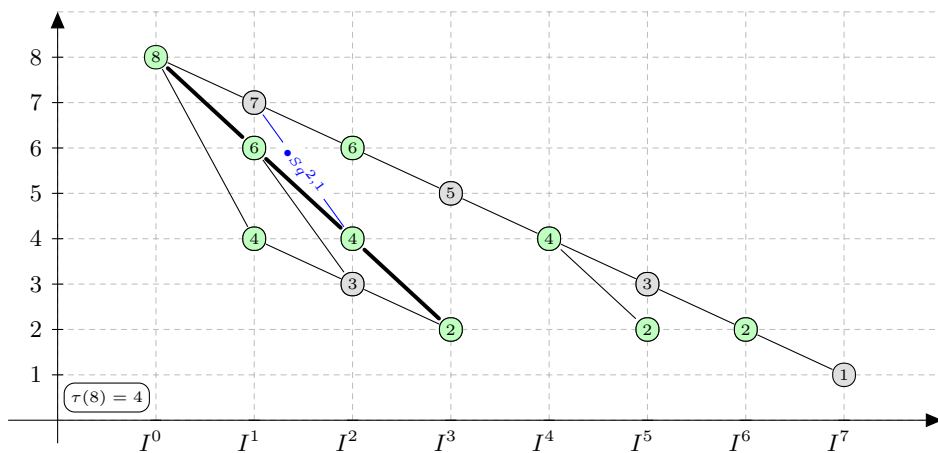
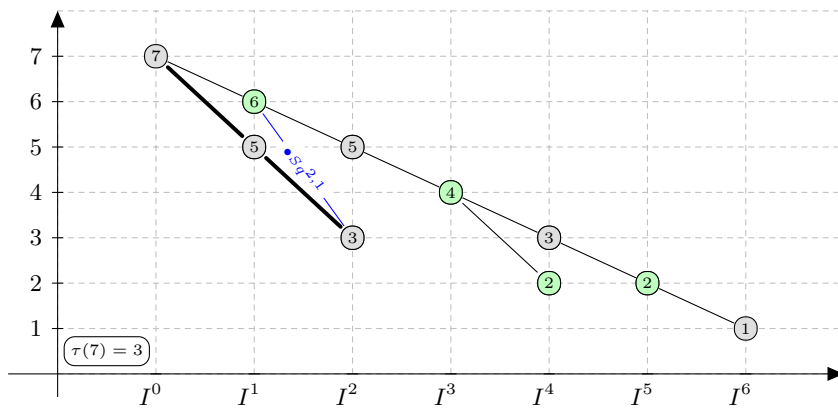
Cela nous permet d'observer que la fonction τ est périodique modulo 4 de la période 12. On peut maintenant formuler le théorème principal de cette sous-section.

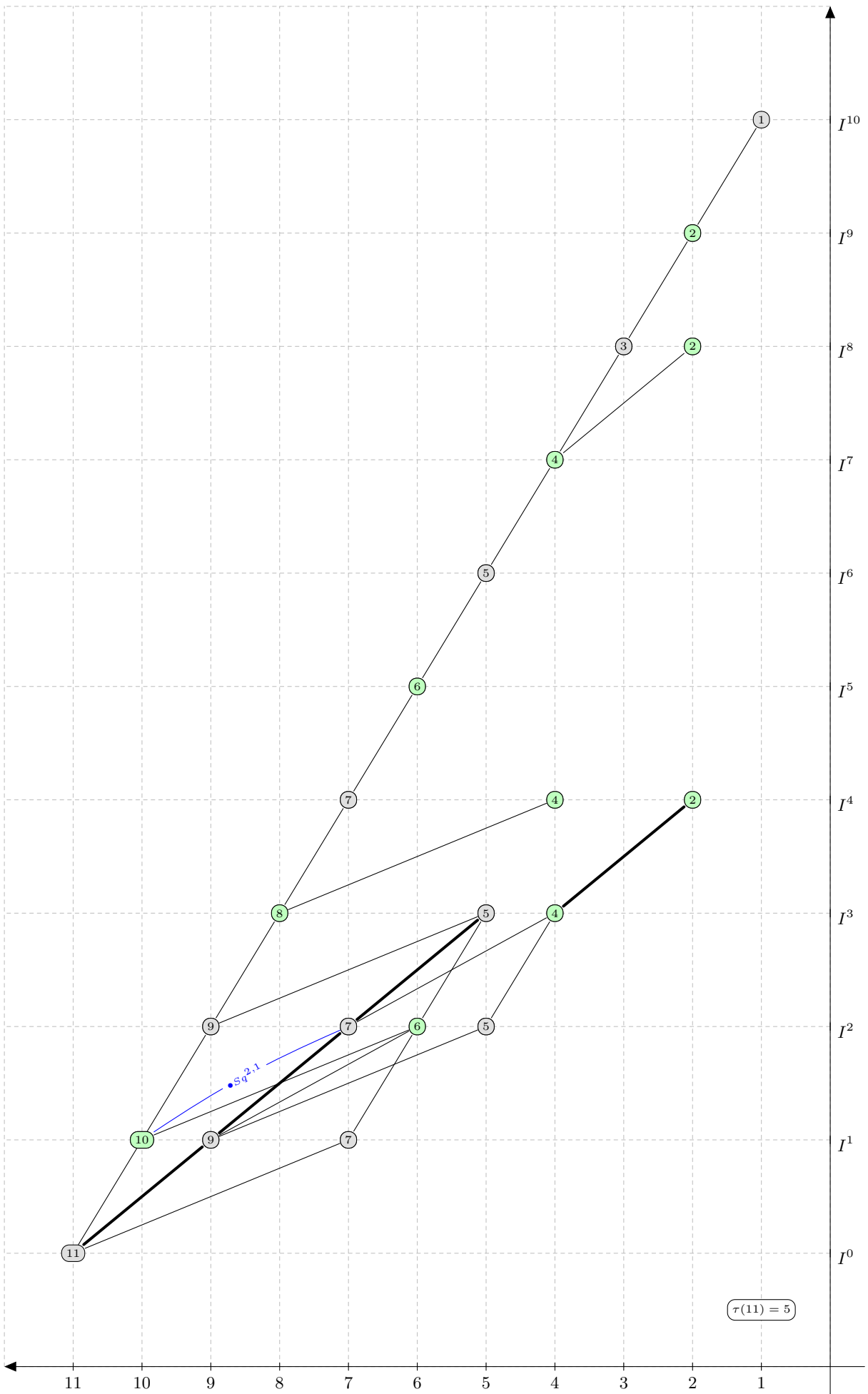
Théorème 3.2.2.2. On a

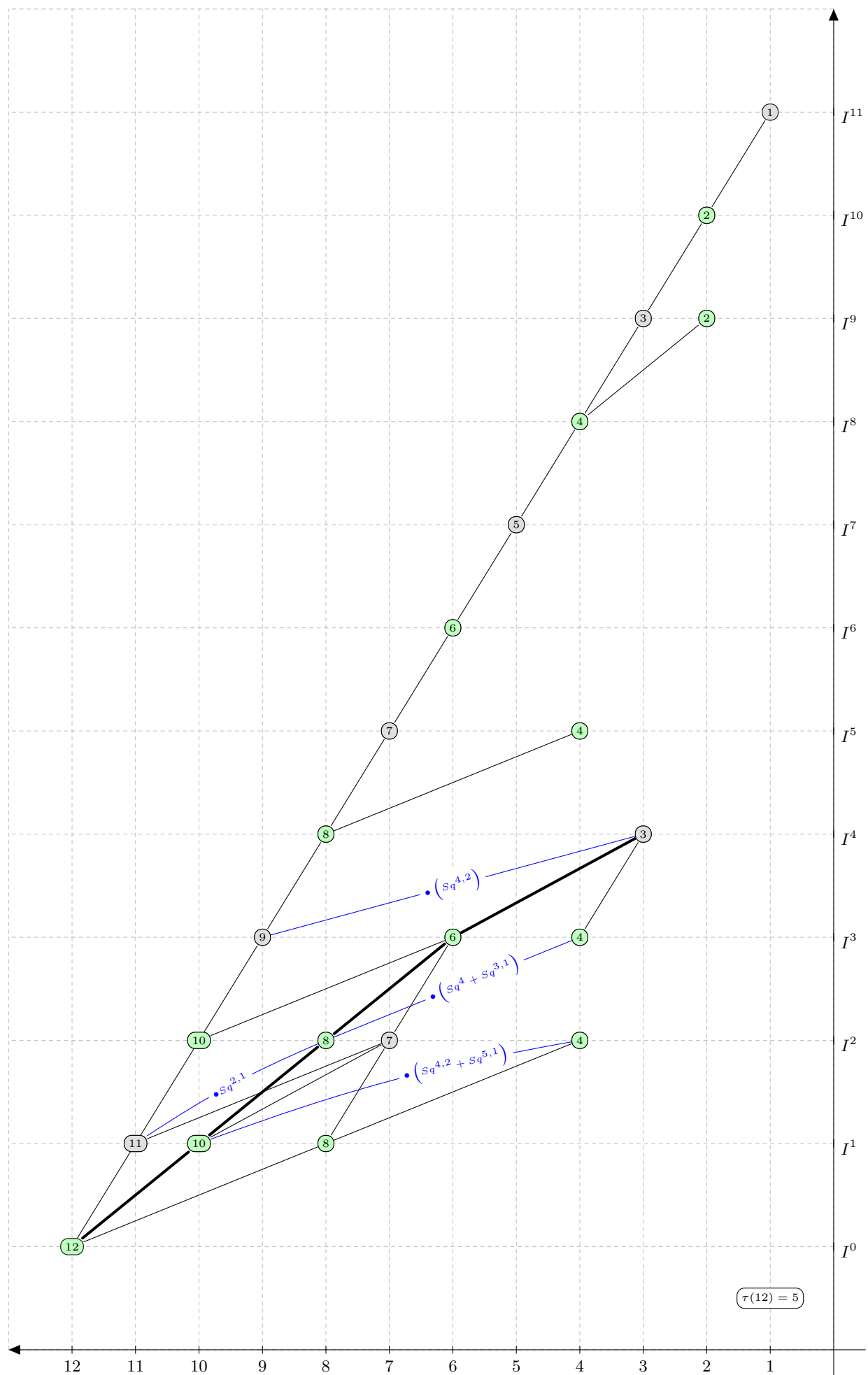
$$\tau(n) = \begin{cases} 0 & \text{si } n = 1, 2, 3, 4, \\ 2 & \text{si } n = 5, \\ 3 & \text{si } n = 6, 7, \\ 4 & \text{si } n = 8, 9, \\ 5 & \text{si } n = 10, 11, 12, 14, 15, 16 \\ 6 & \text{si } n = 13, \\ 4k + \tau(i) & \text{si } n = 12k + i, 5 \leq i \leq 16. \end{cases}$$

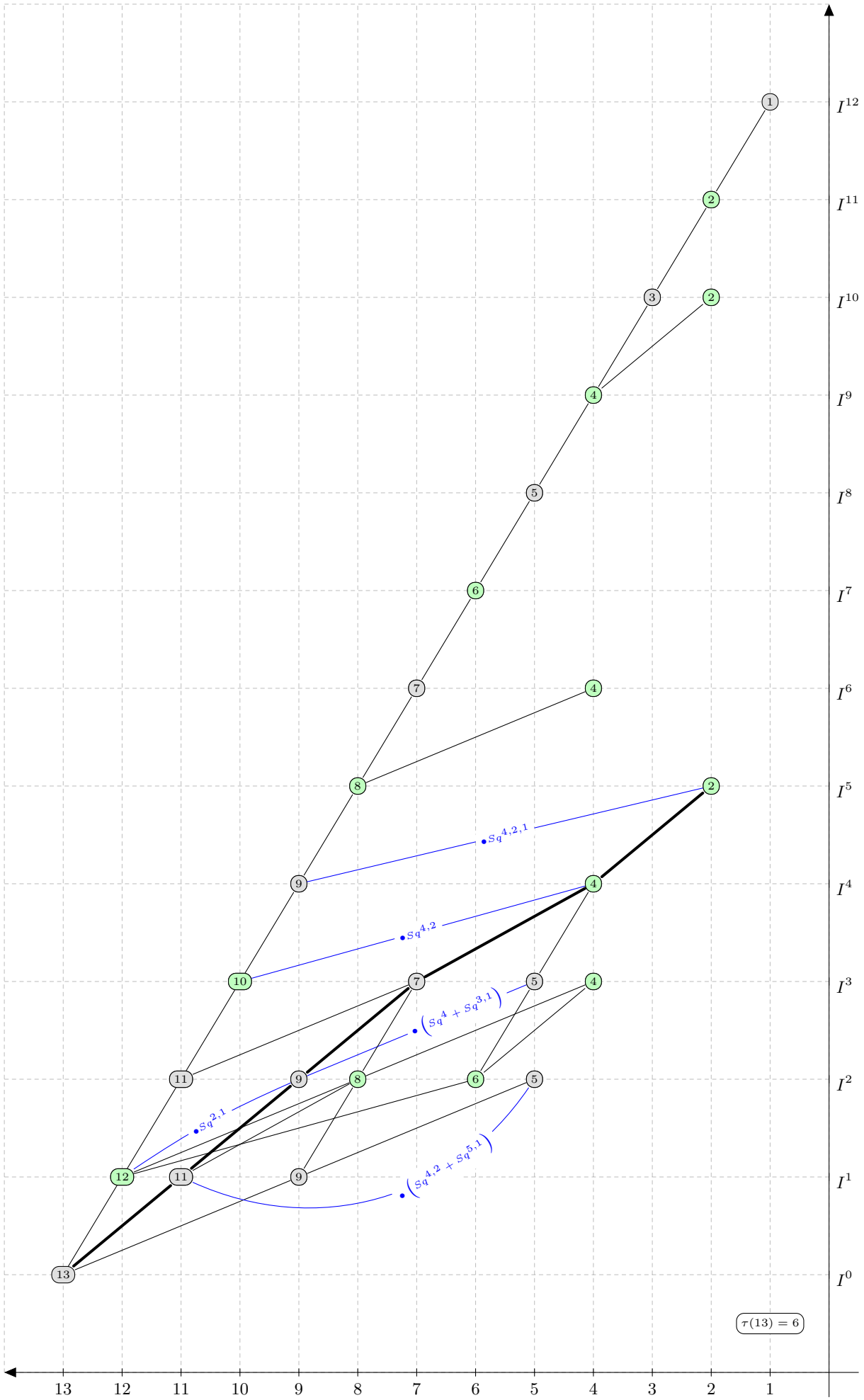
On donne dans la suite des calculs qui mènent au théorème 3.2.2.2. Les résultats sur $\tau(n)$ pour $3 \leq n \leq 18$ proviennent des diagrammes suivants. Dans ces diagrammes, on précise les résolutions $I^0 \rightarrow \dots \rightarrow I^{n-1}$ de $\Sigma^n \mathbb{F}_2$ dont chaque module $J(n)$ dans I^i est représenté comme un point \boxed{n} sur la colonne i . Les flèches $\boxed{n} \rightarrow \boxed{m}$ sont $\bullet Sq^{n-m}$ sauf mention explicite. Une rotation de 90 degré sera nécessaire pour les diagrammes de $\Sigma^{11} \mathbb{F}_2$ à $\Sigma^{18} \mathbb{F}_2$ pour la raison de mise en page.

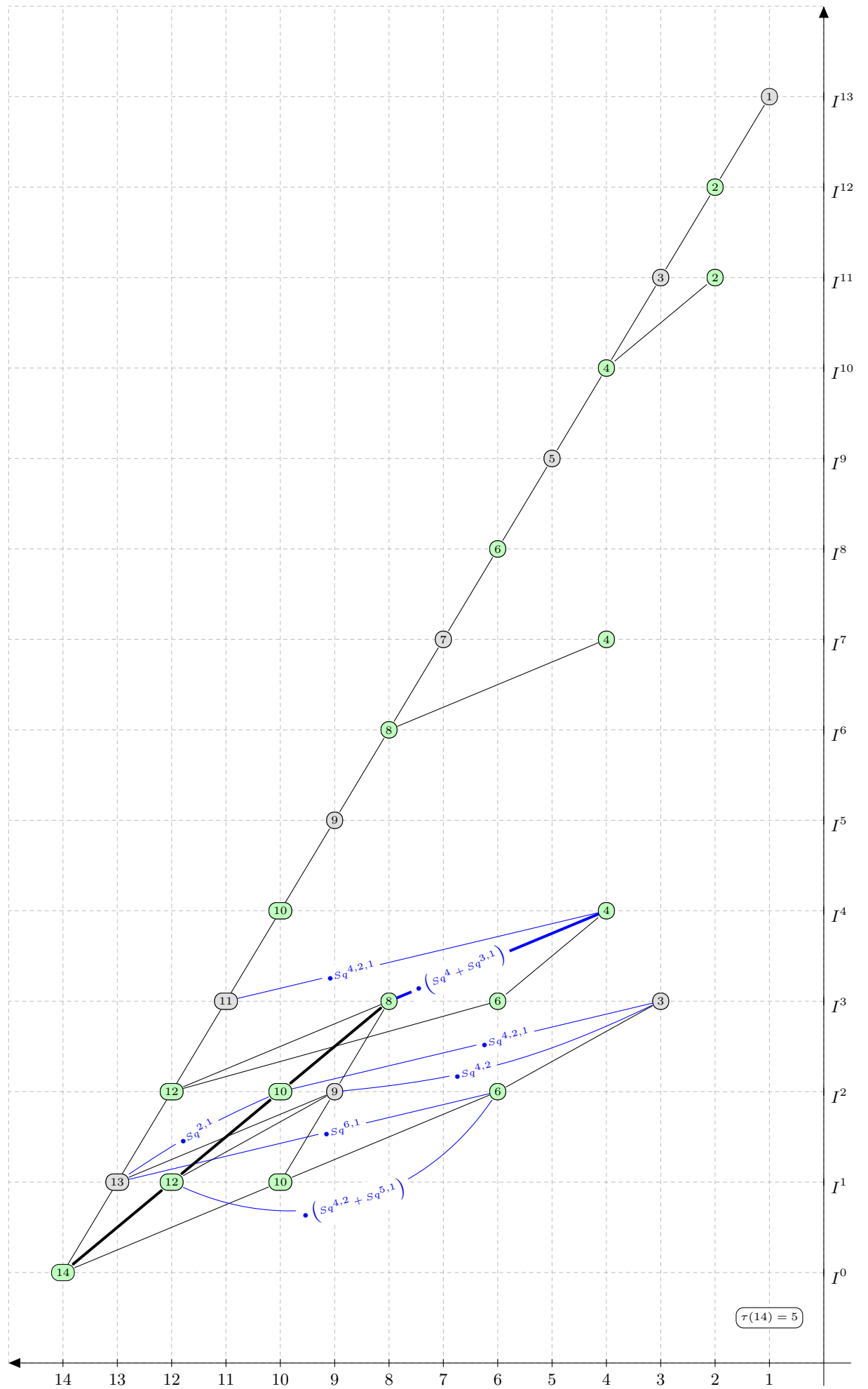


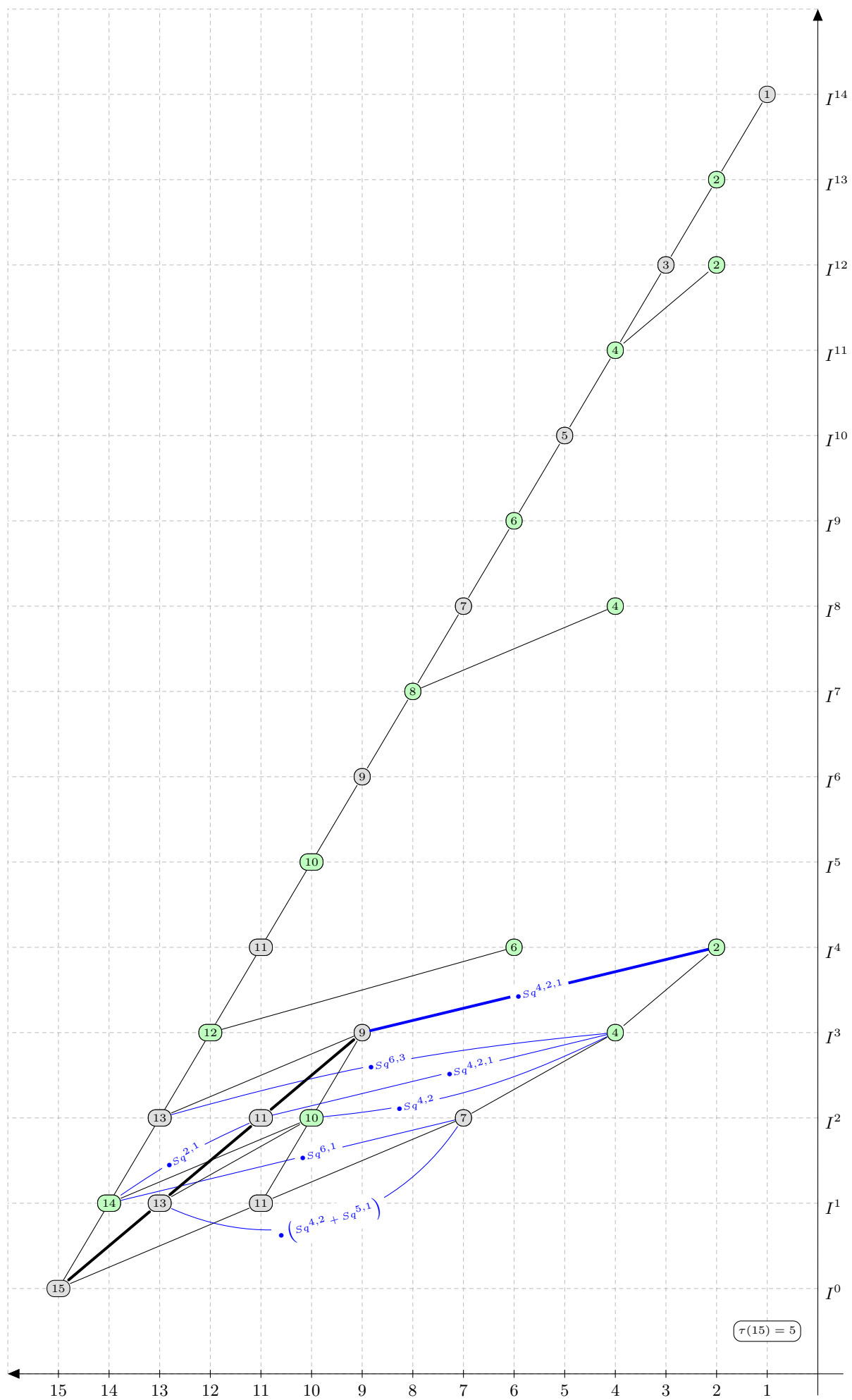


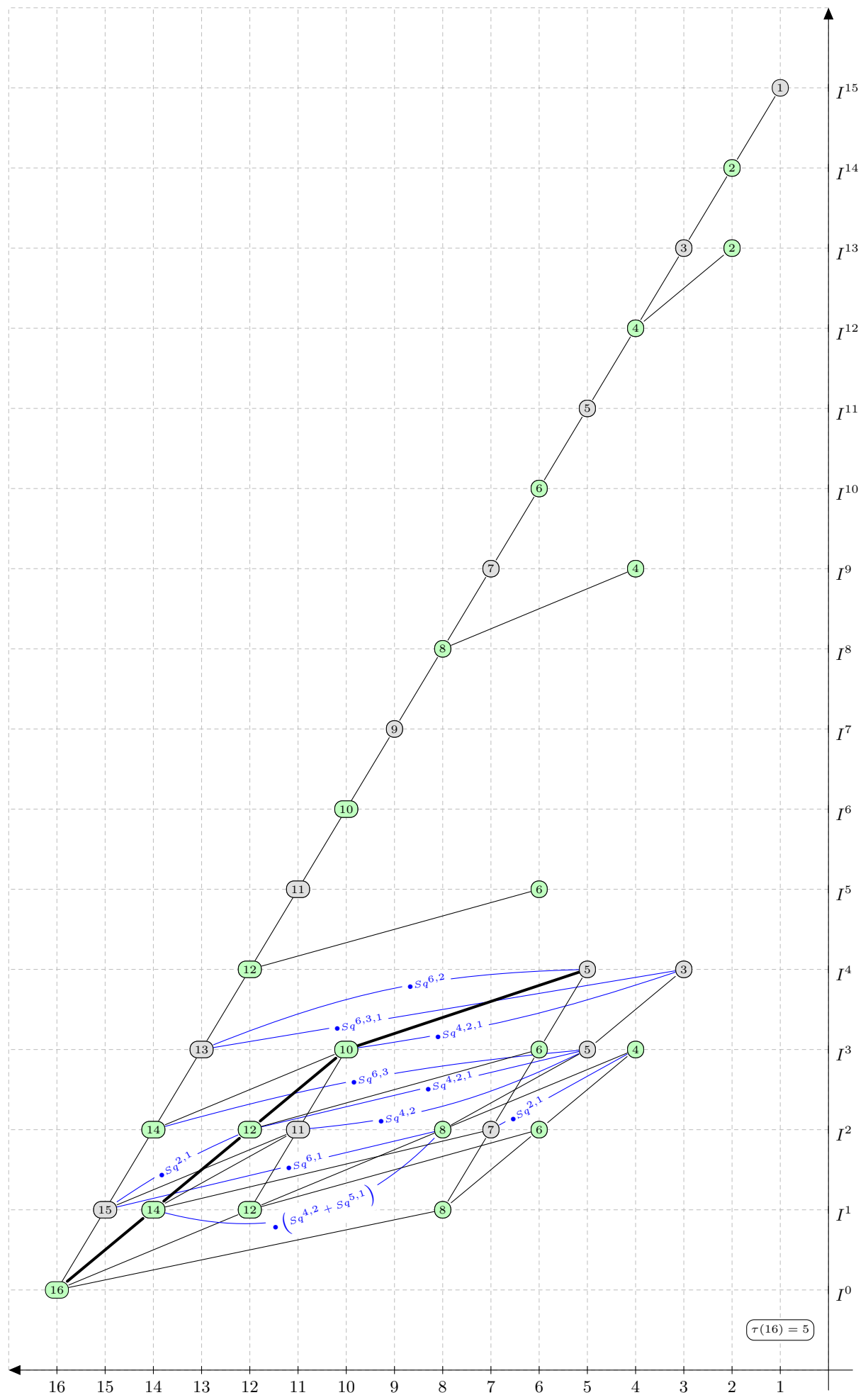


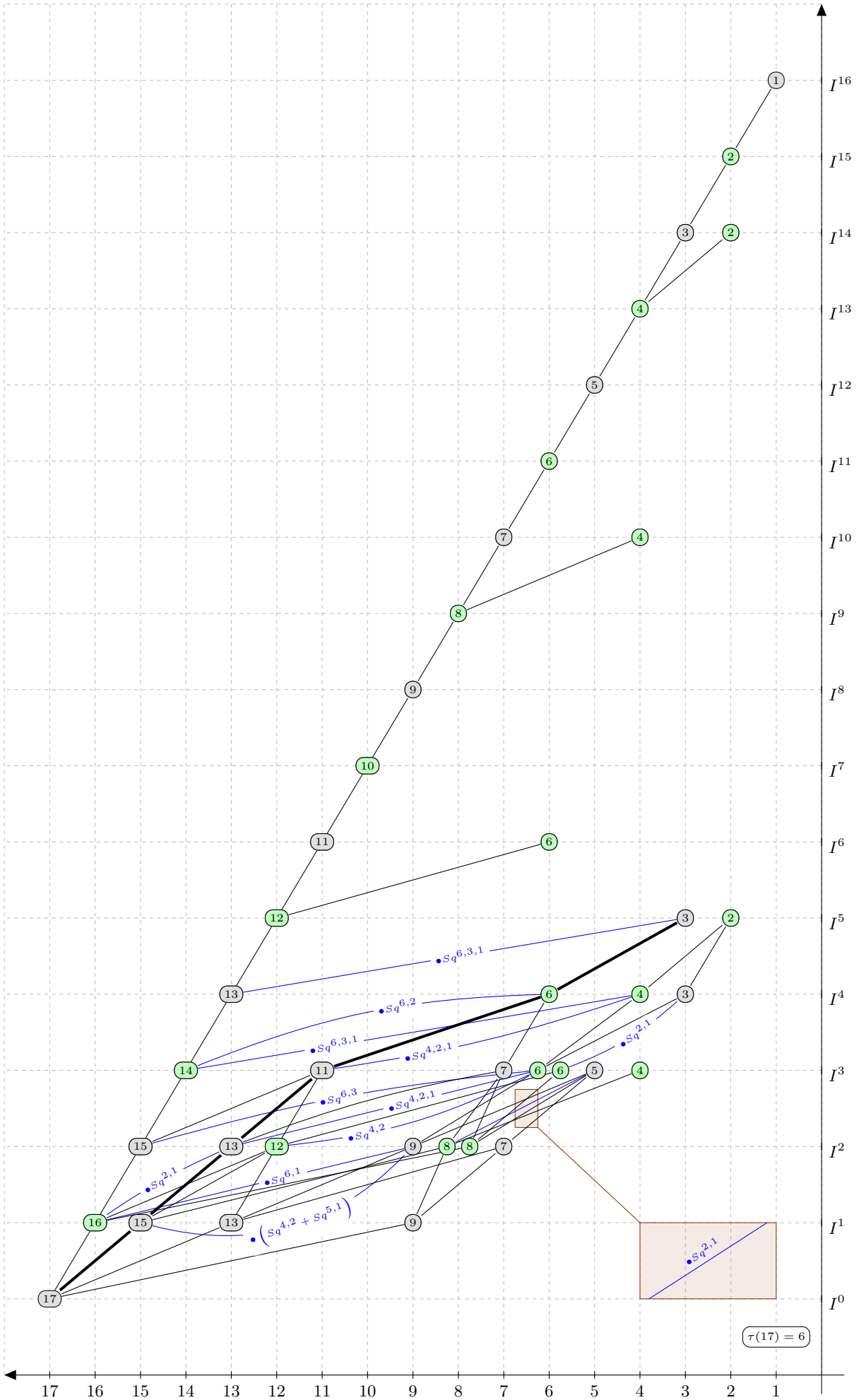


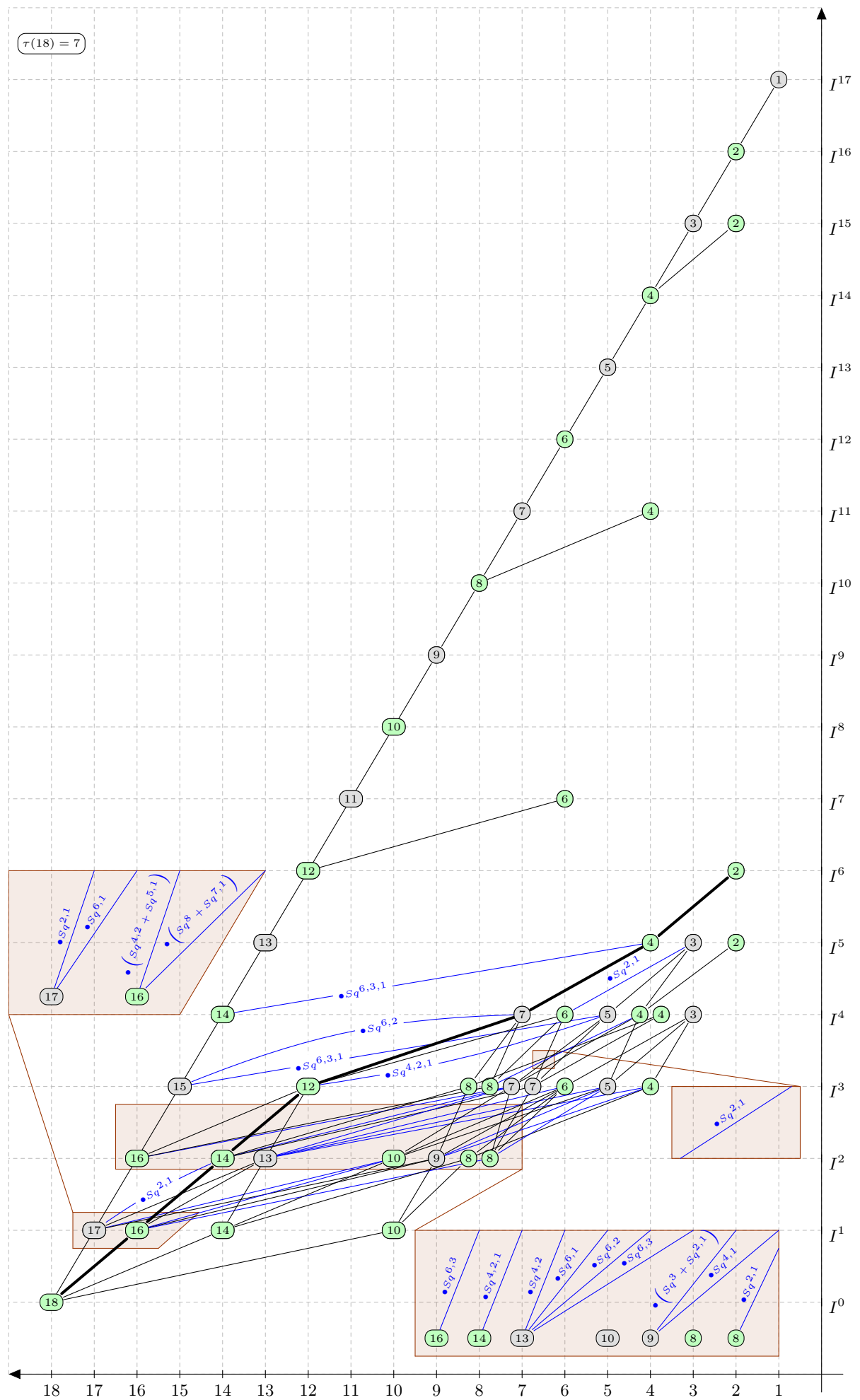












On remarque que sur chaque diagramme, il y a une ligne grasse qui sépare la partie de Bockstein de la résolution avec du reste. C'est la longueur de cette ligne qui détermine la valeur de la fonction τ .

Notation 3.2.2.3. 1. Le morphisme $\bullet\delta : J(n) \rightarrow J(m)$ est dit de longueur $n - m$ si $\bullet\delta$ n'est pas trivial.

2. Pour chaque résolution injective minimale de $\Sigma^n \mathbb{F}_2$, on appelle "ligne seconde de n " la ligne qui sépare la suite de Bockstein du reste.

3. Soit (S) une suite :

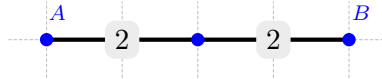
$$\dots \rightarrow I^{n-1} \rightarrow I^n \rightarrow I^{n+1} \rightarrow \dots$$

telle que $I^j \cong J(n_j) \oplus \left(\bigoplus_{\alpha \leq n_j} J(\alpha) \right)$. La suite :

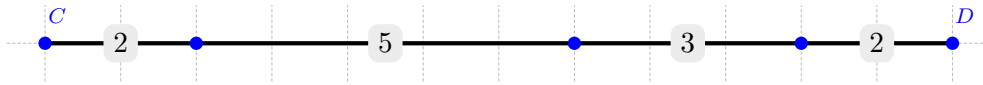
$$\dots \rightarrow J(n_{j-1}) \rightarrow J(n_j) \rightarrow J(n_{j+1}) \rightarrow \dots$$

est appelée "ligne extrême" de (S) .

4. On note (d) la ligne



et (Δ) la ligne



La longueur de (d) sera 4 et celle de (Δ) sera 12. La ligne (d) représente la suite de morphismes :

$$J(n+2) \xrightarrow{\bullet Sq^2} J(n) \xrightarrow{\bullet Sq^2} J(n-2)$$

et (Δ) représente la suite :

$$J(n+2) \xrightarrow{\bullet Sq^2} J(n) \xrightarrow{\bullet Sq^5} J(n-5) \xrightarrow{\bullet Sq^3} J(n-8) \xrightarrow{\bullet Sq^2} J(n-10).$$

5. En prenant $C \equiv B$ on peut former une ligne plus longue que l'on note $(d\Delta)$. De même manière, on obtient les lignes (Δ^n) en plaçant n lignes (Δ) consécutivement, l'une à droite de l'autre. Par convention (Δ^0) est un point et donc $(d\Delta^0) \equiv (d)$.

6. Pour un entier n , on note \mathcal{B}_n la suite de Bockstein contenue dans la résolution injective minimale de $\Sigma^n \mathbb{F}_2$ que l'on note $\mathcal{I}\mathcal{M}_n$, \mathcal{L}_n la ligne seconde de n et \mathcal{R}_n le complémentaire.

Par définition de l'algorithme BG, on obtient la proposition suivante :

Proposition 3.2.2.4. On a

$$\text{BGA}(\mathcal{I}\mathcal{M}_n) = \mathcal{I}\mathcal{M}_{n+1}.$$

De plus, dans la présentation graphique de $\mathcal{I}\mathcal{M}_{n+1}$, il n'y a aucun module de Brown-Gitler entre la suite de Bockstein et la ligne extrême de $\text{BGA}(\mathcal{L}_n)$.

On reformule le théorème 3.2.2.2 pour le cas $n = 6 + 12i$.

Lemme 3.2.2.5. *Pour $n = 6 + 12i$, sur la présentation graphique de la résolution de $\Sigma^n \mathbb{F}_2$, la ligne qui sépare la suite de Bockstein et le reste est de la forme $(d\Delta^i)$. Par conséquent, $\tau(6 + 12i) = 2 + 4i$.*

La démonstration de ce lemme et celle du théorème 3.2.2.2 seront renvoyées à l'appendice A.3.2.

Torsions de Frobenius dans la catégorie \mathcal{U}

LA TORSION DE FROBENIUS dans la catégorie \mathcal{P} des foncteurs polynomiaux stricts induit des monomorphismes

$$\mathrm{Ext}_{\mathcal{P}}^*(F_1, F_2) \hookrightarrow \mathrm{Ext}_{\mathcal{P}}^*(F_1^{(1)}, F_2^{(1)}),$$

naturels en F_1 et en F_2 . À l'aide du foncteur¹ $\bar{m} : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{U}$, on établit le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc}
 \vdots & & \vdots \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 \mathrm{Ext}_{\mathcal{P}}^*(F_1^{(r-1)}, F_2^{(r-1)}) & \xrightarrow{\mathrm{Ext}^*(\bar{m}, \bar{m})} & \mathrm{Ext}_{\mathcal{U}}^*(\Phi^{r-1}F_1(F(1)), \Phi^{r-1}F_2(F(1))) \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 \mathrm{Ext}_{\mathcal{P}}^*(F_1^{(r)}, F_2^{(r)}) & \xrightarrow{\mathrm{Ext}^*(\bar{m}, \bar{m})} & \mathrm{Ext}_{\mathcal{U}}^*(\Phi^r F_1(F(1)), \Phi^r F_2(F(1))) \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 \mathrm{Ext}_{\mathcal{P}}^*(F_1^{(r+1)}, F_2^{(r+1)}) & \xrightarrow{\mathrm{Ext}^*(\bar{m}, \bar{m})} & \mathrm{Ext}_{\mathcal{U}}^*(\Phi^{r+1}F_1(F(1)), \Phi^{r+1}F_2(F(1))) \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 \vdots & & \vdots
 \end{array} \tag{4.0.1}$$

Puisque le foncteur oubli $\mathcal{O} : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{F}$ se factorise à travers \mathcal{U} via le foncteur \bar{m} , chaque monomorphisme naturel

$$\mathrm{Ext}_{\mathcal{P}}^*(F_1, F_2) \hookrightarrow \mathrm{Ext}_{\mathcal{F}}^*(\mathcal{O}(F_1), \mathcal{O}(F_2))$$

s'écrit comme le composé

$$\mathrm{Ext}_{\mathcal{P}}^*(F_1, F_2) \rightarrow \mathrm{Ext}_{\mathcal{U}}^*(\bar{m}(F_1), \bar{m}(F_2)) \rightarrow \mathrm{Ext}_{\mathcal{F}}^*(\mathcal{O}(F_1), \mathcal{O}(F_2)).$$

Les morphismes

$$\mathrm{Ext}_{\mathcal{P}}^*(F_1, F_2) \rightarrow \mathrm{Ext}_{\mathcal{U}}^*(\bar{m}(F_1), \bar{m}(F_2))$$

sont donc injectifs.

1. Voir [Hai10], voir aussi la section 2.2.

Ceci amène à poser :

Question 4.0.2.6. *Les morphismes que l'on appelle morphismes à la Frobenius*

$$\mathrm{Ext}_{\mathcal{U}}^* \left(\bar{m} \left(F_1^{(r-1)} \right), \left(\bar{m} F_2^{(r-1)} \right) \right) \rightarrow \mathrm{Ext}_{\mathcal{U}}^* \left(\bar{m} \left(F_1^{(r)} \right), \bar{m} \left(F_2^{(r)} \right) \right), \quad (\mathrm{Frob}\text{-}\mathcal{U})$$

sont-ils injectifs ?

Question 4.0.2.7. *Est-il vrai que, pour tous modules instables M et N , les morphismes*

$$\mathrm{Ext}_{\mathcal{U}}^* (\Phi^r M, \Phi^r N) \rightarrow \mathrm{Ext}_{\mathcal{U}}^* (\Phi^{r+1} M, \Phi^{r+1} N) \quad (\mathrm{Frob}\text{-general-}\mathcal{U})$$

sont injectifs ?

Ces questions n'admettent pas de réponses positives à priori. Cela sera justifié dans le paragraphe suivant. Toutefois :

Théorème 4.3.3.18. *Soient deux entiers $n > k \geq 2$; soit t un entier tel que $-16 \leq t \leq 2$. Alors les morphismes*

$$\mathrm{Ext}_{\mathcal{U}}^{2^n - 2^k + t} (\Phi^r F(1), \Phi^r F(1)) \rightarrow \mathrm{Ext}_{\mathcal{U}}^{2^n - 2^k + t} (\Phi^{r+1} F(1), \Phi^{r+1} F(1))$$

sont injectifs pour tout r .

4.1 La réduction du problème et un contre-exemple

Faute d'espace pour les grands diagrammes, dans la suite on utilisera parfois la notation

$$\mathrm{Ex}_{r,s}^i(M) := \mathrm{Ext}_{\mathcal{U}}^i (\Phi^r M, \Phi^s F(1)).$$

On note ainsi

$$H_r = F(1) / \Phi^r F(1).$$

Proposition 4.1.0.8. *Étant donné un module instable connexe² M , on a des isomorphismes*

$$\mathrm{Ext}_{\mathcal{U}}^* (\Phi^r M, \Phi^r F(1)) \cong \mathrm{Ext}_{\mathcal{U}}^* (\Phi^r M, F(1))$$

pour tout r . De plus, le diagramme suivant est commutatif

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Ext}_{\mathcal{U}}^* (\Phi^r M, \Phi^r F(1)) & \longrightarrow & \mathrm{Ext}_{\mathcal{U}}^* (\Phi^r M, F(1)) \\ \mathrm{Ext}_{\mathcal{U}}^* (\Phi, \Phi) \downarrow & & \downarrow (\lambda_{\Phi^r M})^* \\ \mathrm{Ext}_{\mathcal{U}}^* (\Phi^{r+1} M, \Phi^{r+1} F(1)) & \longrightarrow & \mathrm{Ext}_{\mathcal{U}}^* (\Phi^{r+1} M, F(1)) \end{array} \quad (4.1.1)$$

Démonstration. La suite exacte courte

$$0 \rightarrow \Phi^r F(1) \rightarrow F(1) \rightarrow H_r \rightarrow 0$$

2. C'est à dire M est nul en degré 0.

induit la suite exacte longue

$$\cdots \longrightarrow \mathrm{Ext}_{r,r}^i(M) \longrightarrow \mathrm{Ext}_{r,1}^i(M) \longrightarrow \mathrm{Ext}_{\mathcal{U}}^i(\Phi^r M, H_r) \longrightarrow \mathrm{Ext}_{r,r}^{i+1}(M) \longrightarrow \cdots$$

Parce que d'une part, la connectivité de $\Phi^r M$ est au moins $2^r - 1$, d'autre part, $(H_r)^t = 0$ pour $t > 2^{r-1}$ donc³ il existe une résolution injective $(I^n, \partial^n)_{0 \leq n \leq 2^r - 1}$ de H_r telle que $(I^n)^t = 0$ pour tout n et tout $t > 2^{r-1}$. Il s'ensuit que $\mathrm{Ext}_{\mathcal{U}}^*(\Phi^r F(1), H_r) = 0$. On a donc

$$\mathrm{Ext}_{\mathcal{U}}^*(\Phi^r M, \Phi^r F(1)) \cong \mathrm{Ext}_{\mathcal{U}}^*(\Phi^r M, F(1)).$$

Le morphisme

$$\mathrm{Ext}_{\mathcal{U}}^*(\Phi^r M, \Phi^r F(1)) \xrightarrow{\mathrm{Ext}_{\mathcal{U}}^*(\Phi, \Phi)} \mathrm{Ext}_{\mathcal{U}}^*(\Phi^{r+1} M, \Phi^{r+1} F(1))$$

fait commuter le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Ext}_{\mathcal{U}}^*(\Phi^r M, \Phi^r F(1)) & & \\ \downarrow \mathrm{Ext}_{\mathcal{U}}^*(\Phi, \Phi) & \searrow (\lambda_{\Phi^r M})^* & \\ \mathrm{Ext}_{\mathcal{U}}^*(\Phi^{r+1} M, \Phi^{r+1} F(1)) & \xrightarrow{(\lambda_{\Phi^r F(1)})_*} & \mathrm{Ext}_{\mathcal{U}}^*(\Phi^{r+1} M, \Phi^r F(1)) \end{array}$$

Comme le morphisme $(\lambda_{\Phi^r F(1)})_*$ est un isomorphisme, on peut considérer $\mathrm{Ext}_{\mathcal{U}}^*(\Phi, \Phi)$ comme le composé $\left((\lambda_{\Phi^r F(1)})_*\right)^{-1} \circ (\lambda_{\Phi^r M})^*$. Il résulte de la commutativité du diagramme

$$\begin{array}{ccccc} \mathrm{Ext}_{\mathcal{U}}^*(\Phi^r M, \Phi^r F(1)) & \xrightarrow{\quad} & \mathrm{Ext}_{\mathcal{U}}^*(\Phi^r M, F(1)) & & \\ \downarrow (\lambda_{\Phi^r M})^* & & \downarrow (\lambda_{\Phi^r M})^* & & \\ \mathrm{Ext}_{\mathcal{U}}^*(\Phi^{r+1} M, \Phi^r F(1)) & \xrightarrow{\quad} & \mathrm{Ext}_{\mathcal{U}}^*(\Phi^{r+1} M, F(1)) & & \\ \uparrow (\lambda_{\Phi^r F(1)})_* & & \uparrow (\lambda_{\Phi^r F(1)})_* & & \\ \mathrm{Ext}_{\mathcal{U}}^*(\Phi^{r+1} M, \Phi^{r+1} F(1)) & & & & \end{array}$$

(A curved dotted arrow labeled $\mathrm{Ext}_{\mathcal{U}}^*(\Phi, \Phi)$ connects the top-left and bottom-left nodes.)

que le diagramme 4.1.1 commute. □

Grâce à la proposition 4.1.0.8, on peut se ramener à étudier les groupes $\mathrm{Ext}_{\mathcal{U}}^*(\Phi^r M, F(1))$ au lieu des groupes $\mathrm{Ext}_{\mathcal{U}}^*(\Phi^r M, \Phi^r F(1))$ dès que M est connexe. Cela nous suggère d'étudier la résolution injective minimale de $F(1)$. On donnera dans ce chapitre un résultat partiel sur cette résolution qui permet de confirmer l'injectivité de morphismes à la Frobenius⁴ dans plusieurs cas intéressants.

On commence par détailler traduire l'injectivité des morphismes $\mathrm{Ext}_{\mathcal{U}}^*(\Phi, \Phi)$. Pour le confort

3. Voir le lemme 1.1.4.30, page 29.

4. Voir Frob- \mathcal{U} , page 110.

du lecteur, on explicite ci-dessous, l'énoncé correspondant.

Corollaire 4.1.0.9. *Soit M un module instable connexe. Il existe un isomorphisme entre les co-limites*

$$\operatorname{colim}_n \operatorname{Ext}_{\mathcal{U}}^*(\Phi^n M, F(1)) \cong \operatorname{colim}_n \operatorname{Ext}_{\mathcal{U}}^*(\Phi^n M, \Phi^n F(1)),$$

la première provient de la suite

$$\dots \xrightarrow{(\lambda_{\Phi^{n-2}M})^*} \operatorname{Ext}_{\mathcal{U}}^*(\Phi^{n-1}M, F(1)) \xrightarrow{(\lambda_{\Phi^{n-1}M})^*} \operatorname{Ext}_{\mathcal{U}}^*(\Phi^n M, F(1)) \xrightarrow{(\lambda_{\Phi^n M})^*} \dots$$

et la deuxième provient de la suite

$$\dots \xrightarrow{\operatorname{Ext}_{\mathcal{U}}^*(\Phi, \Phi)} \operatorname{Ext}_{\mathcal{U}}^*(\Phi^{n-1}M, \Phi^{n-1}F(1)) \xrightarrow{\operatorname{Ext}_{\mathcal{U}}^*(\Phi, \Phi)} \operatorname{Ext}_{\mathcal{U}}^*(\Phi^n M, \Phi^n F(1)) \xrightarrow{\operatorname{Ext}_{\mathcal{U}}^*(\Phi, \Phi)} \dots$$

Alors les morphismes $\operatorname{Ext}_{\mathcal{U}}^*(\Phi, \Phi)$ sont des monomorphismes si et seulement si $(\lambda_{\Phi^{n-1}M})^*$ les sont.

D'après [HLS93] et [NS14], on sait calculer $\operatorname{colim}_n \operatorname{Ext}_{\mathcal{U}}^*(\Phi^n M, F(1))$:

Théorème 4.1.0.10. *Soit n un entier. Le morphisme*

$$\operatorname{Ext}_{\mathcal{U}}^*(\Phi^n M, F(1)) \rightarrow \operatorname{Ext}_{\mathcal{F}}^*(f(M), I),$$

naturel en M , induit l'isomorphisme

$$\operatorname{colim}_n \operatorname{Ext}_{\mathcal{U}}^*(\Phi^n M, F(1)) \cong \operatorname{Ext}_{\mathcal{F}}^*(f(M), I)$$

naturel en M .

De plus, d'après [FLS94] on a

$$\operatorname{Ext}_{\mathcal{F}}^*(f(F(1) \otimes F(1)), I) = \operatorname{Ext}_{\mathcal{F}}^*(I \otimes I, I) = 0,$$

donc :

$$\operatorname{colim}_n \operatorname{Ext}_{\mathcal{U}}^*(\Phi^n(F(1) \otimes F(1)), F(1)) = 0.$$

Si on suppose que $(\lambda_{\Phi^{n-1}(F(1) \otimes F(1))})^*$ est injectif, les groupes $\operatorname{Ext}_{\mathcal{U}}^*(\Phi^n(F(1) \otimes F(1)), F(1))$ doivent être nuls. Cependant :

Lemme 4.1.0.11. *On a un isomorphisme*

$$\operatorname{Ext}_{\mathcal{U}}^5(F(1) \otimes F(1), F(1)) \cong \mathbb{F}_2.$$

Avant de donner la preuve du lemme 4.1.0.11, on remarque qu'il existe i tel que $(\lambda_{\Phi^i(F(1) \otimes F(1))})^*$ n'est pas injectif. Au cas contraire :

$$\mathbb{F}_2 \subset \operatorname{colim}_n \operatorname{Ext}_{\mathcal{U}}^*(\Phi^n(F(1) \otimes F(1)), F(1)),$$

ce qui contredit le lemme 4.1.0.11.

Démonstration du lemme 4.1.0.11. La suite exacte courte

$$0 \rightarrow F(2) \rightarrow F(1) \otimes F(1) \rightarrow \Lambda^2(F(1)) \rightarrow 0,$$

et la projectivité de $F(2)$ donnent les isomorphismes

$$\mathrm{Ext}_{\mathcal{U}}^i \left(\Lambda^2(F(1)), F(1) \right) \cong \mathrm{Ext}_{\mathcal{U}}^i (F(1) \otimes F(1), F(1)) \quad (4.1.2)$$

pour $i \geq 2$. Il résulte de la résolution injective minimale de $\Lambda^2(F(1))^5$ qu'on a

$$\mathrm{Ext}_{\mathcal{U}}^5 \left(\Lambda^2(F(1)), F(1) \right) \cong \mathbb{F}_2.$$

Il en découle que $\mathrm{Ext}_{\mathcal{U}}^5 (F(1) \otimes F(1), F(1)) \cong \mathbb{F}_2$. □

On peut donc reformuler le contre-exemple :

Contre-exemple 4.1.0.12. *Il existe un entier i tel que le morphisme*

$$\mathrm{Ext}_{\mathcal{U}}^5 (\Phi, \Phi) : \mathrm{Ext}_{\mathcal{U}}^5 \left(\Phi^i(F(1) \otimes F(1)), \Phi^i(F(1)) \right) \rightarrow \mathrm{Ext}_{\mathcal{U}}^5 \left(\Phi^{i+1}(F(1) \otimes F(1)), \Phi^{i+1}(F(1)) \right)$$

n'est pas injectif.

4.2 Une application des pseudo-hyper résolutions

Le but de cette section est de donner un exemple qui soutient la conjecture d'injectivité des morphismes à la Frobenius dans le cas particulier

$$\mathrm{Ext}_{\mathcal{U}}^d (\Phi F(1), \Phi F(1)) \hookrightarrow \mathrm{Ext}_{\mathcal{U}}^d (\Phi^2 F(1), \Phi^2 F(1)).$$

Les groupes $\mathrm{Ext}_{\mathcal{U}}^d (\Phi F(1), \Phi F(1))$ ont été calculés⁶ grâce à la résolution projective de $\Phi F(1)$:

$$\cdots \xrightarrow{Sq^1} F(n) \xrightarrow{Sq^1} F(n-1) \xrightarrow{Sq^1} \cdots \xrightarrow{Sq^1} F(2) \rightarrow \Phi F(1) \rightarrow 0.$$

Afin de calculer les groupes $\mathrm{Ext}_{\mathcal{U}}^d (\Phi^2 F(1), \Phi^2 F(1))$, on aura besoin d'une résolution projective de $\Phi^2 F(1)$, construite à partir de celle de $F(1)$ en utilisant des pseudo-hyper résolutions.

Proposition 4.2.0.13 ([LZ86]). *Étant donné un entier n , on note $m = \lfloor \log_2(n) \rfloor$. Il y a la suite exacte*

$$\bigoplus_{i=1}^m F(2n + 2^i - 1) \xrightarrow{d_n} F(2n) \xrightarrow{f_n} F(n) \xrightarrow{g_n} \Sigma F(n-1) \rightarrow 0,$$

où $g_n(\iota_n) = \Sigma \iota_{n-1}$, $f_n(\iota_{2n}) = Sq_0(\iota_n)$ et $d_n(\iota_{2n+2^i-1}) = Q_i(\iota_{2n})$, Q_i notant l'opération de Milnor

5. Il s'agit de la résolution

$$\cdots \xrightarrow{Sq^1} F(n) \xrightarrow{Sq^1} F(n-1) \xrightarrow{Sq^1} \cdots \xrightarrow{Sq^1} F(4) \xrightarrow{Sq^1} F(3) \rightarrow \Lambda^2(F(1)) \rightarrow 0.$$

Voir aussi le corollaire 1.1.4.17, page 26.

6. Voir la remarque 2.2.1.3, page 60.

définie récursivement par :

$$Q_0 = Sq^1 \text{ et } Q_{i+1} = Q_i Sq^{2^{i+1}} - Sq^{2^{i+1}} Q_i.$$

Cette proposition, combiné avec la suite exacte courte

$$0 \rightarrow \Phi F(n) \rightarrow F(n) \rightarrow \Sigma F(n-1) \rightarrow 0,$$

implique le corollaire suivant.

Corollaire 4.2.0.14. *Il y a des suites exactes*

$$\bigoplus_{i=1}^m F(2n + 2^i - 1) \xrightarrow{d_n} F(2n) \xrightarrow{f_n} \Phi F(n) \rightarrow 0,$$

où $f_n(\iota_{2n}) = \Phi \iota_n$ et $d_n(\iota_{2n+2^i-1}) = Q_i(\iota_{2n})$, m notant $[\log_2(n)]$.

Les résolutions projectives de $\Phi F(n)$ restent mystérieux pour $n \geq 2$. Cependant, on peut construire pour chaque module $\Phi F(n)$ une résolution projective telle qu'on puisse contrôler une partie des différentielles formées par les opérations de Milnor.

Lemme 4.2.0.15. *Soit n un entier. Notant $m = [\log_2(n)]$ et $\Xi_k = \{0, 1, \dots, m\}^{\times k}$, on pose :*

$$\mathcal{Q}_k^n := \bigoplus_{(i_\alpha) \in \Xi_k} F\left(2n - k + \sum_{\alpha=1}^k 2^{i_\alpha}\right).$$

Notons $\partial_k^n : \mathcal{Q}_k^n \rightarrow \mathcal{Q}_{k-1}^n$ défini par la formule :

$$\partial_k^n(\iota_{2n+k_1}) = \sum_{j=1}^{k-1} (Q_{i_{j-1}}) \iota_{l_j},$$

où

$$k_1 = \sum_{j=1}^{k-1} (2^{i_j} - 1) \text{ et } l_j = k_1 - (2^{i_j} - 1).$$

La suite $\{\mathcal{Q}_i^n, \partial_i^n\}_{i \geq 0}$ est donc un complexe.

Démonstration. Le lemme découle du fait que si $p = 2$ on a : $Q_i Q_j = Q_j Q_i$ et $Q_i^2 = 0$. □

On peut donc ajouter des modules sur les termes du complexe $\{\mathcal{Q}_i^n, \partial_i^n\}_{i \geq 0}$ pour obtenir une résolution projective de $\Phi F(n)$.

Corollaire 4.2.0.16. *Pour tous entiers $n > m$ il existe deux résolutions projectives*

$$\{Q_i^n = P_i^n \oplus \mathcal{Q}_i^n, \gamma_i^n\}_{i \geq 0}, \{Q_i^m = P_i^m \oplus \mathcal{Q}_i^m, \gamma_i^m\}_{i \geq 0},$$

de $\Phi F(n)$ et $\Phi F(m)$ respectivement, γ_i^n et γ_i^m notant respectivement

$$\begin{pmatrix} d_i^n & 0 \\ f_i^n & \partial_i^n \end{pmatrix} : P_i^n \oplus \mathcal{Q}_i^n \rightarrow P_{i-1}^n \oplus \mathcal{Q}_{i-1}^n, \begin{pmatrix} d_i^m & 0 \\ f_i^m & \partial_i^m \end{pmatrix} : P_i^m \oplus \mathcal{Q}_i^m \rightarrow P_{i-1}^m \oplus \mathcal{Q}_{i-1}^m.$$

De plus, étant donné un morphisme $F(n) \xrightarrow{\omega} F(m)$ il existe un morphisme

$$\begin{pmatrix} \omega_i^1 & 0 \\ \omega_i^2 & \omega_i^3 \end{pmatrix} : P_i^n \oplus \mathcal{Q}_i^n \rightarrow P_i^m \oplus \mathcal{Q}_i^m$$

entre deux complexes $\{P_i^n \oplus \mathcal{Q}_i^n, \partial_i^n\}_{i \geq 0}$, et $\{P_i^m \oplus \mathcal{Q}_i^m, \partial_i^m\}_{i \geq 0}$, relevant ω .

Démonstration. Il suffit de montrer que si on a un complexe $P_1 \xrightarrow{d} P_0 \xrightarrow{f} M$ il existe un module P'_1 et un morphisme d' telle que la suite $P_1 \oplus P'_1 \xrightarrow{d'} P_0 \xrightarrow{f} M$ soit exacte. Pour cela, il est suffisant de choisir pour P'_1 un module projectif tel que $P'_1 \xrightarrow{e} P_0 \xrightarrow{f} M$ soit exacte et pour d' le morphisme (d, e) . \square

Théorème 4.2.0.17. *Le morphisme $\text{Ext}_{\mathcal{U}}^*(\Phi F(1), \Phi F(1)) \rightarrow \text{Ext}_{\mathcal{U}}^*(\Phi^2 F(1), \Phi^2 F(1))$ est injectif.*

Démonstration. D'après le corollaire 1.5.0.27 sur les pseudo-hyper résolutions, on obtient le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccc}
 \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
 \downarrow \partial_{n-1,2} & & \downarrow \partial_{n-1,1} & & \downarrow Sq^2 & & \downarrow \Phi Sq^1 \\
 \dots \rightarrow & Q_2^{n+2} & \xrightarrow{\partial_{n,2}} & Q_1^{n+2} & \xrightarrow{\partial_{n,1}} & F(2n+4) & \rightarrow \Phi F(n+2) \rightarrow 0 \\
 \downarrow \partial_{n,2}^0 & \swarrow \partial_{n,1}^1 & \downarrow \partial_{n,1}^0 & \searrow \partial_{n,0}^2 & \downarrow Sq^2 & & \downarrow \Phi Sq^1 \\
 \dots \rightarrow & Q_2^{n+1} & \xrightarrow{\partial_{n-1,2}} & Q_1^{n+1} & \xrightarrow{\partial_{n-1,1}} & F(2n+2) & \rightarrow \Phi F(n+1) \rightarrow 0 \\
 \downarrow \partial_{n-1,2}^0 & \swarrow \partial_{n-1,1}^1 & \downarrow \partial_{n-1,1}^0 & \searrow \partial_{n-1,0}^1 & \downarrow Sq^2 & & \downarrow \Phi Sq^1 \\
 \dots \rightarrow & Q_2^n & \xrightarrow{\partial_{n-2,2}} & Q_1^n & \xrightarrow{\partial_{n-2,1}} & F(2n) & \rightarrow \Phi F(n) \rightarrow 0 \\
 \downarrow \partial_{n-2,2}^0 & \swarrow \partial_{n-2,1}^1 & \downarrow \partial_{n-2,1}^0 & \searrow \partial_{n-2,0}^1 & \downarrow Sq^2 & & \downarrow \Phi Sq^1 \\
 \dots \rightarrow & Q_2^{n-1} & \xrightarrow{\partial_{n-3,2}} & Q_1^{n-1} & \xrightarrow{\partial_{n-3,1}} & F(2n-2) & \rightarrow \Phi F(n-1) \rightarrow 0 \\
 \downarrow \partial_{n-3,2}^0 & \swarrow \partial_{n-3,1}^1 & \downarrow \partial_{n-3,1}^0 & \searrow \partial_{n-3,0}^1 & \downarrow Sq^2 & & \downarrow \Phi Sq^1 \\
 \dots \rightarrow & Q_2^{n-2} & \xrightarrow{\partial_{n-4,2}} & Q_1^{n-2} & \xrightarrow{\partial_{n-4,1}} & F(2n-4) & \rightarrow \Phi F(n-2) \rightarrow 0 \\
 \downarrow \partial_{n-4,2}^0 & & \downarrow \partial_{n-4,1}^0 & & \downarrow Sq^2 & & \downarrow \Phi Sq^1 \\
 \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots
 \end{array}$$

Puisque $Sq^2 Sq^2 = Sq^3 Sq^1$ et $F(2n+1)$ est un facteur direct de Q_1^n , on peut choisir $\partial_{n,0}^1$ comme le composé

$$F(2n+4) \xrightarrow{Sq^3} F(2n+1) \hookrightarrow Q_1^n.$$

Pour déterminer les morphismes $\partial_{n,0}^2$, on doit utiliser les relations

$$\partial_{n-2,1}^0 \circ \partial_{n,0}^1 + \partial_{n-1,0}^1 \circ Sq^2 = \partial_{n-3,2} \circ \partial_{n,0}^2.$$

On calcule d'abord le premier membre de l'égalité. Parce que, d'une part

$$\partial_{n,0}^1(\iota_{2n+4}) = Sq^3(\iota_{2n+1})$$

et d'autre part

$$\partial_{n-3,1} \circ \partial_{n-2,1}^0 = Sq^2 \circ \partial_{n-2,1},$$

on obtient donc

$$\partial_{n-2,1}^0 \circ \partial_{n,0}^1(\iota_{2n+4}) = 0.$$

Il s'ensuit que :

$$\left(\partial_{n-2,1}^0 \circ \partial_{n,0}^1 + \partial_{n-1,0}^1 \circ Sq^2 \right) (\iota_{2n+4}) = Sq^2 Sq^3(\iota_{2n-1}).$$

On peut donc choisir $\partial_{n,0}^2$ comme le composé

$$F(2n+4) \xrightarrow{Sq^2} F(2n+2) \hookrightarrow Q_2^{n-1}.$$

Puisque :

$$\left(\partial_{n-3,2}^0 \circ \partial_{n,0}^2 + \partial_{n-1,0}^2 \circ Sq^2 \right) (\iota_{2n+4}) = Sq^2 Sq^2(\iota_{2n}) + Sq^2 Sq^2(\iota_{2n}) = 0,$$

alors on peut choisir $\partial_{n,0}^3 = 0$. Il en découle que $\partial_{n,0}^k = 0$ pour tout $k \geq 3$. Notant

$$M_n := \bigoplus_{i=1}^n Q_i^{n-i},$$

et

$$\dots \xrightarrow{\partial_{n+2}} F(2n+6) \oplus M_{n+1} \xrightarrow{\partial_{n+1}} F(2n+4) \oplus M_n \xrightarrow{\partial_n} F(2n+2) \oplus M_{n-1} \xrightarrow{\partial_{n-1}} \dots$$

la pseudo-hyper résolution de $\Phi^2 F(1)$, on obtient alors le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \xrightarrow{\partial_{n+2}} & F(2n+6) \oplus M_{n+1} & \xrightarrow{\partial_{n+1}} & F(2n+4) \oplus M_n & \xrightarrow{\partial_n} & F(2n+2) \oplus M_{n-1} \xrightarrow{\partial_{n-1}} \dots \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \dots & \xrightarrow{\Phi Sq^1} & \Phi F(n+3) & \xrightarrow{\Phi Sq^1} & \Phi F(n+2) & \xrightarrow{\Phi Sq^1} & \Phi F(n+1) \xrightarrow{\Phi Sq^1} \dots \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \dots & \xrightarrow{Sq^1} & F(n+3) & \xrightarrow{Sq^1} & F(n+2) & \xrightarrow{Sq^1} & F(n+1) \xrightarrow{Sq^1} \dots \end{array}$$

Cela induit le morphisme

$$\mathrm{Ext}_{\mathcal{U}}^*(\Phi F(1), \Phi F(1)) \xrightarrow{\mathrm{Ext}_{\mathcal{U}}^*(\Phi, \Phi)} \mathrm{Ext}_{\mathcal{U}}^*(\Phi^2 F(1), \Phi^2 F(1)).$$

L'image de $\text{Ext}_{\mathcal{U}}^k(\Phi F(1), \Phi F(1))$ est l'homologie du complexe :

$$\left(\text{Hom}_{\mathcal{U}} \left(F(2k+4) \oplus M_k, \Phi^2 F(1) \right), (\partial_k)^* \right)_{k \geq 0}$$

restreint aux $F(2k+4)$ qui est quant à elle \mathbb{F}_2 si $k = 2^t - 4$ et 0 sinon. Cette image coïncide avec ⁷ $\text{Ext}_{\mathcal{U}}^*(\Phi F(1), \Phi F(1))$ donc le morphisme :

$$\text{Ext}_{\mathcal{U}}^*(\Phi F(1), \Phi F(1)) \hookrightarrow \text{Ext}_{\mathcal{U}}^*(\Phi^2 F(1), \Phi^2 F(1))$$

est injectif. □

La démonstration de cette preuve est basée sur la connaissance explicite de la résolution projective de $\Phi F(1)$ donc ne peut pas être réalisée pour le cas général faute de résolution projective de $\Phi^n F(1)$. Cela est l'une des motivations pour étudier la résolution injective de $F(1)$.

4.3 Sur la résolution injective minimale de $F(1)$

D'après la classification des modules injectifs dans \mathcal{U} , un module injectif se décompose comme la somme directe de deux modules. L'un est réduit et l'autre est nilpotent. On désigne par $(I^\bullet, \partial^\bullet) = (N^\bullet \oplus R^\bullet, \partial^\bullet)$ la résolution injective minimale de $F(1)$, R^\bullet et N^\bullet désignant la partie réduite et la partie nilpotente respectivement. Puisque

$$\text{Hom}_{\mathcal{U}}(N^i, R^{i+1}) = 0 \text{ pour tout } i \geq 0,$$

les morphismes ∂^l s'écrivent

$$\begin{pmatrix} \partial_n^l & \omega^l \\ 0 & \partial_r^l \end{pmatrix} : N^l \oplus R^l \rightarrow N^{l+1} \oplus R^{l+1}. \quad (4.3.1)$$

On a un diagramme commutatif dont chaque colonne est une suite exacte courte.

$$\begin{array}{ccccccc} & & 0 & & 0 & & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \dots & \xrightarrow{\partial_n^{i-2}} & N^{i-1} & \xrightarrow{\partial_n^{i-1}} & N^i & \xrightarrow{\partial_n^i} & N^{i+1} \xrightarrow{\partial_n^{i+1}} \dots \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \dots & \xrightarrow{\partial_n^{i-2}} & I^{i-1} & \xrightarrow{\partial_n^{i-1}} & I^i & \xrightarrow{\partial_n^i} & I^{i+1} \xrightarrow{\partial_n^{i+1}} \dots \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \dots & \xrightarrow{\partial_r^{i-2}} & R^{i-1} & \xrightarrow{\partial_r^{i-1}} & R^i & \xrightarrow{\partial_r^i} & R^{i+1} \xrightarrow{\partial_r^{i+1}} \dots \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ & & 0 & & 0 & & 0 \end{array}$$

Les groupes $\text{Ext}_{\mathcal{U}}^*(\Phi^n F(1), F(1))$ sont les cohomologies du complexe

$$\dots \xrightarrow{(\partial^{m+1})^*} \text{Hom}_{\mathcal{U}}(\Phi^n F(1), I^m) \xrightarrow{(\partial^m)^*} \text{Hom}_{\mathcal{U}}(\Phi^n F(1), I^{m-1}) \xrightarrow{(\partial^{m-1})^*} \dots$$

7. Voir la remarque 2.2.1.3, page 60.

Comme les modules R^i sont injectifs réduits, ils sont Nil –fermé par définition. On a les isomorphismes :

$$\begin{aligned} \text{Hom}_{\mathcal{U}}(\Phi^n F(1), I^m) &\cong \text{Hom}_{\mathcal{U}}(\Phi^n F(1), N^m \oplus R^m) \\ &\cong \text{Hom}_{\mathcal{U}}(\Phi^n F(1), N^m) \oplus \text{Hom}_{\mathcal{U}}(\Phi^n F(1), R^m) \\ &\cong \text{Hom}_{\mathcal{U}}(F(1), \tilde{\Phi}^n N^m) \oplus \text{Hom}_{\mathcal{U}}(F(1), \tilde{\Phi}^n R^m) \\ &\cong \text{Hom}_{\mathcal{U}}(F(1), \tilde{\Phi}^n N^m) \oplus \text{Hom}_{\mathcal{U}}(F(1), R^m) \\ &\cong (\tilde{\Phi}^n N^m)^1 \oplus (R^m)^1. \end{aligned}$$

C'est pour cette raison que la partie $(N^\bullet, \partial_n^\bullet)$ et seule le degré 1 de la partie $(R^\bullet, \partial_r^\bullet)$ de la résolution injective de $F(1)$ joue un rôle important dans les calculs des groupes $\text{Ext}_{\mathcal{U}}^*(\Phi^n F(1), F(1))$.

4.3.1 L'homologie du complexe $(R^\bullet, \partial_r^\bullet)$

Le foncteur $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{F}_\omega$ admet un adjoint à droite que l'on note m et d'après [HLS93], le foncteur composé $f \circ m$ est équivalent au foncteur $\text{id}_{\mathcal{F}_\omega}$.

Notation 4.3.1.1. On note ℓ le foncteur composé $m \circ f$. Il est appelé foncteur de localisation loin de Nil .

Proposition 4.3.1.2 ([HLS93]). *Le module $\ell(M)$ est Nil –fermé pour tout module instable M . De plus si M est Nil –fermé, $\ell(M) \cong M$.*

Corollaire 4.3.1.3. *Les modules injectifs réduits sont Nil –fermés. Il en résulte que*

$$\ell(I^\bullet, \partial^\bullet) \cong (R^\bullet, \partial_r^\bullet).$$

Par définition, l'homologie du complexe $(R^\bullet, \partial_r^\bullet)$ est donc le dérivé $\ell^*(F(1))$.

La description de $\ell^*(F(1))$ que l'on donne dans la suite est seulement une récolte des travaux présentés dans [FLS94].

Théorème 4.3.1.4. *Étant donnés M dans \mathcal{U} et F dans \mathcal{F}_ω , il existe une suite spectrale du premier quadrant*

$$\text{Ext}_{\mathcal{U}}^i(M, \ell^j(m(F))) \Rightarrow \text{Ext}_{\mathcal{F}}^{i+j}(f(M), F).$$

Démonstration. On considère la paire de foncteurs

$$\mathcal{U} \xrightarrow{\ell} \mathcal{U} \xrightarrow{\text{Hom}_{\mathcal{U}}(M, -)} \mathcal{V}_{\mathbb{F}_2}.$$

Le foncteur f est exact. Compte tenu du fait que le foncteur m est exact à gauche, le foncteur ℓ l'est aussi. Dans la mesure où m et f préservent l'injectivité, il en est de même pour ℓ . On déduit de la suite spectrale de Grothendieck associée à la paire $\{\ell, \text{Hom}_{\mathcal{U}}(M, -)\}$ qu'il y a une suite spectrale du premier quadrant convergeant vers

$$\text{R}^{i+j}(\text{Hom}_{\mathcal{U}}(M, \ell(-))) \cong \text{R}^{i+j}(\text{Hom}_{\mathcal{U}}(f(M), f(-)))$$

$$\cong \operatorname{Ext}_{\mathcal{F}}^{i+j}(f(M), f(-))$$

dont la deuxième page est

$$R^i(\operatorname{Hom}_{\mathcal{U}}(M, -))\left(R^j(\ell)\right) \cong \operatorname{Ext}_{\mathcal{U}}^i\left(M, \ell^j(-)\right).$$

En l'appliquant au module $m(F)$ on obtient la suite spectrale

$$E_2^{i,j} \cong \operatorname{Ext}_{\mathcal{U}}^i\left(M, \ell^j(m(F))\right) \Rightarrow \operatorname{Ext}_{\mathcal{F}}^{i+j}(f(M), F)$$

d'où le résultat. □

Corollaire 4.3.1.5. *Compte tenu du fait que $F(k)$ est projectif dans \mathcal{U} on a*

$$\ell^i(m(I))^k \cong \operatorname{Hom}_{\mathcal{U}}\left(F(k), \ell^i(F(1))\right) \cong \operatorname{Ext}_{\mathcal{F}}^i\left(\Gamma^k, I\right).$$

Le théorème suivant donne la relation entre les espaces vectoriels $\ell^i(m(I))^k$.

Théorème 4.3.1.6 ([FLS94]). *Les groupes $\operatorname{Ext}_{\mathcal{F}}^i(\Gamma^k, I)$ sont triviaux si k n'est pas une puissance de 2 et :*

$$\operatorname{Ext}_{\mathcal{F}}^i(\Gamma^{2^k}, I) = \begin{cases} \mathbb{F}_2 & \text{si } 2^{k+1} | i, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

De plus les morphismes

$$\operatorname{Ext}_{\mathcal{F}}^i(\Gamma^{2^{k-1}}, I) \xrightarrow{f^*\left(Sq^{2^{k-1}} \bullet\right)} \operatorname{Ext}_{\mathcal{F}}^i(\Gamma^{2^k}, I)$$

sont des isomorphismes si $2^{k+1} | i$.

En cas particulier de $k = 1$, le produit de Yoneda fait de $\operatorname{Ext}_{\mathcal{F}}^*(\Gamma^1, I) = \operatorname{Ext}_{\mathcal{F}}^*(I, I)$ une algèbre commutative.

Théorème 4.3.1.7 ([FLS94]). *L'algèbre $\operatorname{Ext}_{\mathcal{F}}^*(I, I)$ est une \mathbb{F}_2 -algèbre commutative. Elle est engendrée par les classes $e_n \in \operatorname{Ext}_{\mathcal{F}}^{2^{n+1}}(I, I)$ et admet la présentation suivante*

$$\operatorname{Ext}_{\mathcal{F}}^*(I, I) \cong \mathbb{F}_2[e_0, e_1, \dots, e_n, \dots] / \langle e_n^2, n \in \mathbb{N} \rangle,$$

$\langle e_n^2, n \in \mathbb{N} \rangle$ désignant l'idéal engendré par les puissances 2-ièmes.

Corollaire 4.3.1.8. *Les modules instables $\ell^i(F(1))$ sont nuls pour i impair et*

$$\ell^i(F(1)) \cong F(1) / \Phi^n F(1) \text{ si } i = 2^n(2k+1).$$

Démonstration. Par définition des modules $F(n)$, on a des isomorphismes

$$\operatorname{Hom}_{\mathcal{U}}(F(n), M) \cong M^n,$$

naturels en M . Alors l'action de Sq^i sur M^n peut se voir comme l'action de $Sq^i : F(n+i) \rightarrow F(n)$ sur $\text{Hom}_{\mathcal{U}}(F(n), M)$. L'isomorphisme

$$\ell^i(m(I))^k \cong \text{Hom}_{\mathcal{U}}(F(k), \ell^i(F(1))) \cong \text{Ext}_{\mathcal{F}}^i(\Gamma^k, I),$$

combiné avec le théorème 4.3.1.6, montre que

$$\ell^i(F(1)) \cong F(1)/\Phi^n F(1) \text{ si } i = 2^n(2k+1)$$

en tant qu'espaces vectoriels gradués. A cause de l'écart de degrés, la seule opération qui peut agir non-trivialement sur $(\ell^i(F(1)))^{2^k}$ est Sq^{2^k} . A travers la suite spectrale

$$\text{Hom}_{\mathcal{U}}(F(k), \ell^i(F(1))) \Rightarrow \text{Ext}_{\mathcal{F}}^i(\Gamma^k, I),$$

cette opération devient

$$\text{Ext}_{\mathcal{F}}^i(\Gamma^{2^k}, I) \xrightarrow{f^*(Sq^{2^k} \bullet)} \text{Ext}_{\mathcal{F}}^i(\Gamma^{2^{k+1}}, I).$$

Ce morphisme est induit par le Verchiebung⁸ $\Gamma^{2^{k+1}} \rightarrow \Gamma^{2^k}$. Il résulte du théorème 4.3.1.6 que

$$\ell^i(F(1)) \cong F(1)/\Phi^n F(1) \text{ si } i = 2^n(2k+1)$$

en tant que modules instables. □

4.3.2 La partie réduite de la résolution

Ce paragraphe est consacré pour étudier la partie $(R^\bullet, \partial_r^\bullet)$ de la résolution injective minimale de $F(1)$. En particulier, le degré 1 de cette partie sera donné.

4.3.2.1 A propos d'un résultat de A. Touzé et un lemme de connectivité

On va donner dans cette section une explication rapide d'un résultat de A. Touzé sur l'annulation de groupes d'extensions dans la catégorie \mathcal{F} . Sauf mention explicite à une autre référence, on renvoie à [Tou13] à travers cette section.

Théorème 4.3.2.1. *Étant donné F un foncteur de la catégorie \mathcal{P}_s , alors*

$$\text{Ext}_{\mathcal{F}}^*(I, \mathcal{O}(F)) = 0$$

dès que s n'est pas une puissance de p , \mathcal{O} notant le foncteur oubli $\mathcal{P} \rightarrow \mathcal{F}$.

Ce théorème est une conséquence des études sur la question suivante.

Question 4.3.2.2. *Soit $F \in \mathcal{P}_s$ (on dit que F est de degré s). Quel est le degré du foncteur $\mathcal{O}(F) \in \mathcal{F}$? (par abus de notation, on note dorénavant F le foncteur $\mathcal{O}(F)$).*

8. Ce Verschiebung est le dual du morphisme de Frobenius $S^{2^k} \rightarrow S^{2^{k+1}}$. Pour plus de détails voir [Hai10, section 2].

Notation 4.3.2.3. Soient s un entier et p un nombre premier. On note $\sum_{i=1}^n \alpha_n p^n$ l'expression p -adique de s . On désigne par $\Sigma_p(s)$ la somme $\sum_{i=1}^n \alpha_n$ et

$$\mathcal{I}(p, s) = \{n \in \mathbb{N} | n \equiv s(p-1) \text{ et } \Sigma_p(s) \leq n \leq s\}.$$

Théorème 4.3.2.4. Soit $F \in \mathcal{P}_s$ un foncteur de degré s . Le degré dans la catégorie \mathcal{F} de $\mathcal{O}(F)$ est un élément de $\mathcal{I}(p, s)$.

Définition 4.3.2.5 (Ext-paramétré). Soient $F, G \in \mathcal{F}$ et $V \in \mathcal{V}$. On note :

$$F^V(W) := F(\text{Hom}_{\mathcal{V}}(V, W)),$$

$$G_V(W) := G(V \otimes W),$$

pour tout $W \in \mathcal{V}$. On définit le foncteur $\underline{\text{Ext}}_{\mathcal{F}}^i(F, G) \in \mathcal{F}$ par la formule :

$$\underline{\text{Ext}}_{\mathcal{F}}^i(F, G)(V) := \text{Ext}_{\mathcal{F}}^i(F^V, G) \cong \text{Ext}_{\mathcal{F}}^i(F, G_V)$$

Remarque 4.3.2.6. L'évaluation de $\underline{\text{Ext}}_{\mathcal{F}}^i(F, G)$ sur le corps de base \mathbb{F}_p redonne le groupe d'extension usuelle $\text{Ext}_{\mathcal{F}}^i(F, G)$.

Lemme 4.3.2.7. 1. Si F est un foncteur polynomial strict de degré s il en est de même pour le foncteur $\underline{\text{Ext}}_{\mathcal{F}}^i(F, G)$.
2. Si G est un foncteur polynomial strict de degré s il en est de même pour le foncteur $\underline{\text{Ext}}_{\mathcal{F}}^i(F, G)$.

Ceci, combiné avec le théorème 4.3.2.4, permet d'énoncer :

Proposition 4.3.2.8. Soit $F \in \mathcal{P}_s$ et $G \in \mathcal{P}_t$ tels que $\mathcal{I}(p, s) \cap \mathcal{I}(p, t) = \emptyset$ alors

$$\text{Ext}_{\mathcal{F}}^*(F, G) = 0.$$

Démonstration. Supposons au contraire que $\text{Ext}_{\mathcal{F}}^*(F, G) \neq 0$. Le foncteur $\underline{\text{Ext}}_{\mathcal{F}}^i(F, G)$ est donc non-trivial. Son degré dans la catégorie \mathcal{F} appartient à $\mathcal{I}(p, s) \cap \mathcal{I}(p, t)$ d'après le théorème 4.3.2.4. On en déduit la contradiction. \square

Afin de récupérer le théorème 4.3.2.1, on a besoin du lemme suivant.

Lemme 4.3.2.9. Un entier positif d appartient à $\mathcal{I}(p, s)$ si et seulement si il existe d entiers r_i tels que $\sum_{i=1}^d p^{r_i} = s$.

Théorème 4.3.2.1. Étant donné F un foncteur de la catégorie \mathcal{P}_s , alors

$$\text{Ext}_{\mathcal{F}}^*(I, \mathcal{O}(F)) = 0$$

dès que s n'est pas une puissance de p .

Démonstration. On constate que $I \in \mathcal{P}_1$ et $\mathcal{I}(p, 1) = \{1\}$. Si le degré de F n'est pas une puissance de p alors $1 \notin \mathcal{I}(p, s)$. Le résultat découle de la proposition 4.3.2.8. \square

On énonce ci-dessous une proposition facile dont on aura besoin pour la suite.

Proposition 4.3.2.10. *Soient $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m)$ une 2-partition régulière et $k+1 = \sum_{i=1}^m 2^{i-1} \lambda_i$. Le module $I_{(\lambda)}$ est k -connexe. En particulier, tous les modules $I_{(\lambda)}$ sont triviaux en degrés plus petit que 8 sauf :*

$$\{I_{(n)} | n \leq 8\}, \{I_{(n,1)} | n \leq 5\}, \{I_{(n,2)} | n \leq 4\}. \quad (4.3.2)$$

Le lemme suivant est classique.

Lemme 4.3.2.11. *Soit $\{I_j\}_{j \geq 0}$ la résolution injective minimale d'un foncteur $F \in \mathcal{F}$. Le nombre de copies de $f(I_{(\lambda)})$ dans I_j est la dimension $\dim_{\mathbb{F}_2} \text{Ext}_{\mathcal{F}}^j(f(S_\lambda), F)$.*

Corollaire 4.3.2.12. *Le nombre de copies de $I_{(\lambda)}$ dans R^i de la résolution injective minimale de $F(1)$ est la dimension $\dim_{\mathbb{F}_2} \text{Ext}_{\mathcal{F}}^i(f(S_\lambda), F)$.*

Démonstration. Cela découle du fait que $f(R^\bullet, \partial_r^\bullet)$ est la résolution injective minimale de $f(F(1))$. \square

Soient $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m)$ une 2-partition régulière et $k = \sum_{i=1}^m \lambda_i$. On désigne par I_λ le foncteur $f(I_{(\lambda)})$ est de degré k . Alors selon le théorème 4.3.2.1, parmi les foncteurs

$$\{I_n | n \leq 8\}, \{I_{n,1} | n \leq 5\}, \{I_{n,2} | n \leq 4\}, \quad (4.3.3)$$

seuls les foncteurs I_1, I_2, I_4 et $I_{3,1}$ peuvent être facteurs directs des termes dans la résolution injective $(f(R^\bullet, \partial_r^\bullet))$ du foncteur I . Plus précisément :

Lemme 4.3.2.13. *On a :*

$$\begin{aligned} \text{Ext}_{\mathcal{F}}^i(S_{(2^n)}, I) &= \begin{cases} \mathbb{F}_2 & \text{si } i = 2^{n+1}k + 2^n - 1, \\ 0 & \text{sinon;} \end{cases} \\ \text{Ext}_{\mathcal{F}}^i(S_{(3,1)}, I) &= \begin{cases} \mathbb{F}_2 & \text{si } i = 8k + 2, 8k + 4, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \end{aligned}$$

Comme I_{2^n} est l'enveloppe injective de $S_{(2^n)}$, le foncteur $f(R^k)$ contient une seule copie de I_{2^n} si $k = 2^{n+1}l + 2^n - 1$ et n'en contient aucune sinon ; ainsi comme $I_{3,1}$ est l'enveloppe injective de $S_{(3,1)}$, le foncteur $f(R^k)$ contient une seule copie de $I_{3,1}$ si $k = 8l + 2$ ou $k = 8l + 4$ et n'en contient aucune sinon.

Démonstration. Puisque $S_{(2^n)} = \Lambda^{2^n}$, on se ramène à calculer les groupes $\text{Ext}_{\mathcal{F}}^i(\Lambda^{2^n}, I)$. Il résulte de la suite de Koszul

$$0 \rightarrow \Lambda^{2^n} \rightarrow \Lambda^{2^n-1} \otimes S^1 \rightarrow \Lambda^{2^n-2} \otimes S^2 \rightarrow \dots \rightarrow \Lambda^1 \otimes S^{2^n-1} \rightarrow S^{2^n} \rightarrow 0$$

et du théorème 4.3.1.7, qu'on a des isomorphismes :

$$\begin{aligned} \operatorname{Ext}_{\mathcal{F}}^i(\Lambda^{2^n}, I) &\cong \operatorname{Ext}_{\mathcal{F}}^i(I^\#, (\Lambda^{2^n})^\#) \\ &\cong \operatorname{Ext}_{\mathcal{F}}^i(I, \Lambda^{2^n}) \\ &\cong \operatorname{Ext}_{\mathcal{F}}^{i-2^n-1}(I, S^{2^n}) \\ &\cong \begin{cases} \mathbb{F}_2 & \text{si } i = 2^{n+1}k + 2^n - 1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \end{aligned}$$

On note $W_{(3,1)}$ le noyau de la multiplication $\Lambda^3 \otimes \Lambda^1 \rightarrow \Lambda^4$. Parce que les groupes $\operatorname{Ext}_{\mathcal{F}}^i(\Lambda^3 \otimes \Lambda^1, I)$ sont triviaux, la suite exacte longue

$$\cdots \rightarrow \operatorname{Ext}_{\mathcal{F}}^i(\Lambda^3 \otimes \Lambda^1, I) \rightarrow \operatorname{Ext}_{\mathcal{F}}^i(W_{(3,1)}, I) \rightarrow \operatorname{Ext}_{\mathcal{F}}^{i+1}(\Lambda^4, I) \rightarrow \operatorname{Ext}_{\mathcal{F}}^{i+1}(\Lambda^3 \otimes \Lambda^1, I) \rightarrow \cdots$$

associée à la suite exacte courte

$$0 \rightarrow W_{(3,1)} \rightarrow \Lambda^3 \otimes \Lambda^1 \rightarrow \Lambda^4 \rightarrow 0$$

donne les isomorphismes

$$\operatorname{Ext}_{\mathcal{F}}^i(W_{(3,1)}, I) \xrightarrow{\sim} \operatorname{Ext}_{\mathcal{F}}^{i+1}(\Lambda^4, I).$$

Par ailleurs, compte tenu de la suite exacte courte

$$0 \rightarrow \Lambda^4 \rightarrow W_{(3,1)} \rightarrow S_{(3,1)} \rightarrow 0,$$

on obtient la suite exacte longue

$$\cdots \longrightarrow \operatorname{Ext}_{\mathcal{F}}^{i-1}(\Lambda^4, I) \longrightarrow \operatorname{Ext}_{\mathcal{F}}^i(S_{(3,1)}, I) \longrightarrow \operatorname{Ext}_{\mathcal{F}}^i(W_{(3,1)}, I) \longrightarrow \operatorname{Ext}_{\mathcal{F}}^i(\Lambda^4, I) \longrightarrow \cdots$$

Le deuxième calcul en découle. □

Remarque 4.3.2.14. *Le module R^k contient une seule copie de $I_{(1)} \cong \tilde{H}^* B(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \cong \mathbb{F}_2[u]/\mathbb{F}_2$ si k est impair et n'en contient aucune sinon. À part $I_{(1)}$, les autres modules instables injectifs indécomposables sont 1-connexes. Alors, on a*

$$(R^{2l})^1 \cong \langle u \rangle \text{ et } (R^{2l+1})^1 \cong 0.$$

Par l'exactitude de la résolution injective de $F(1)$, on obtient :

$$\partial_r^{2l}(u) = 0 \text{ et } \omega^{2l}(u) \neq 0.$$

Par ailleurs, parmi les modules injectifs nilpotents, il n'y a que les modules de Brown-Gitler de type $J(2^n)$ qui ne sont pas triviaux en degré 1. Il en découle que chaque terme N^{2l+1} contient un facteur direct $J(2^{n_l})$ tel que $\omega^{2l}(u) = x_{n_l}$.

Dans le reste du chapitre, on va montrer que dans plusieurs cas intéressants, le terme N^{2l+1}

contient un seul facteur direct de type $J(2^{n_l})$ alors que N^{2l} et N^{2l+2} n'en contiennent aucun et cela est suffisant pour calculer le groupe $\text{Ext}_{\mathcal{U}}^{2l}(\Phi^r F(1), F(1))$. En effet, on va montrer que dans ce cas :

$$\text{Ext}_{\mathcal{U}}^{2l}(\Phi^r F(1), F(1)) = \begin{cases} \mathbb{F}_2 & \text{si } r \geq n_l, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

4.3.3 La partie nilpotente de la résolution

Puisque, d'une part, les homologies $H^k(R^\bullet, \partial_r^\bullet)$ sont finies et d'autre part

$$H^k(R^\bullet, \partial_r^\bullet) \cong H^{k+1}(N^\bullet, \partial_n^\bullet),$$

alors les homologies $H^{k+1}(N^\bullet, \partial_n^\bullet)$ sont finies. Dans ce paragraphe, on va montrer que les modules N^l sont aussi finis.

4.3.3.1 L'algèbre homologique élémentaire

On va donner dans la suite les lemmes techniques élémentaires dont on aura besoin. La vérification de ces lemmes est renvoyée à l'appendice A.2, page 144.

Lemme 4.3.3.1. *Un module instable à la fois nilpotent et réduit est trivial.*

On remarque que si un module instable est nilpotent ou réduit, il en est de même pour son enveloppe injective. Un module instable peut être vu comme l'extension d'un module réduit par son plus grand sous-module nilpotent. Le lemme suivant explique comment on forme l'enveloppe injective de l'extension à partir de la partie nilpotente et celle qui est réduite.

Lemme 4.3.3.2. *Étant donné une suite exacte courte*

$$0 \rightarrow N \rightarrow M \rightarrow R \rightarrow 0,$$

N désignant un module nilpotent et R désignant un module réduit, l'enveloppe injective de M est la somme directe de l'enveloppe injective de R et celle de N .

Alors, pour déterminer les modules N^j , il faut calculer les sous-modules nilpotents les plus grands des modules $\text{Coker}(\partial^{j-2})$.

Lemme 4.3.3.3. *Pour $k \geq 1$ il y a des suites exactes :*

$$0 \rightarrow \ell^k(F(1)) \rightarrow \text{Coker}(\partial_n^k) \rightarrow \text{Coker}(\partial^k) \rightarrow \text{Coker}(\partial_r^k) \rightarrow 0.$$

Pour $k = 0$ on a :

$$\text{Coker}(\partial_n^0) = 0 \rightarrow \text{Coker}(\partial^0) \cong \text{Coker}(\partial_r^0).$$

De plus, il y a des injections :

$$\varphi_{2k+1} : \ell^{2k+2}(F(1)) \rightarrow \text{Coker}(\partial_r^{2k+1})$$

telles que $\text{Coker}(\varphi_{2k+1})$ sont réduits. Notant ψ_{2k+1} le composé :

$$\text{Coker}(\partial^{2k+1}) \rightarrow \text{Coker}(\partial_r^{2k+1}) \rightarrow \text{Coker}(\varphi_{2k+1}),$$

son noyau s'insère dans une suite exacte courte :

$$0 \rightarrow \text{Coker}(\partial_n^{2k+1}) \rightarrow \text{Ker}(\psi_{2k+1}) \rightarrow \ell^{2k+2}(F(1)) \rightarrow 0.$$

Les modules $\text{Ker}(\psi_{2k+1})$ sont alors les sous-modules nilpotents les plus grands de $\text{Coker}(\partial^{2k+1})$. Le corollaire suivant généralise la notation de $\text{Ker}(\psi_{2k+1})$ à tout indice entier.

Corollaire 4.3.3.4. *Posant $\varphi_{2k} = 0$ pour tout k , on désigne par ψ_{2k} le morphisme induit $\text{Coker}(\partial^{2k}) \rightarrow \text{Coker}(\partial_r^{2k})$. Alors pour tout $k \geq 1$ on a la suite exacte*

$$0 \rightarrow \ell^k(F(1)) \rightarrow \text{Coker}(\partial_n^k) \rightarrow \text{Ker}(\psi_k) \rightarrow \ell^{k+1}(F(1)) \rightarrow 0.$$

Corollaire 4.3.3.5. *Dans la résolution injective minimale de $F(1)$, les modules N^i sont finis. Plus précisément N^i est l'enveloppe injective de $\text{Ker}(\psi_{i-2})$.*

Démonstration. Afin de trouver la résolution minimale de $F(1)$, il faut déterminer son enveloppe injective puis l'enveloppe injective de $\text{Coker}(\partial^k)$ pour tout k . On raisonne par récurrence.

1. Comme $F(1)$ est réduit, il n'y a pas de partie nilpotente dans son enveloppe injective. Donc $N^0 = 0$.
2. Il résulte des lemmes 4.3.3.2, 4.3.3.3 que N^{2k} est l'enveloppe injective de :

$$\text{Coker}(\partial_n^{2k-2}) / \ell^{2k-2}(F(1))$$

et N^{2k+1} est l'enveloppe injective d'une certaine extension

$$E_{2k-1} \in \text{Ext}_{\mathcal{U}}^1(\ell^{2k}(F(1)), \text{Coker}(\partial_n^{2k-1})).$$

Ces deux modules sont finis par l'hypothèse de récurrence donc compte tenu du lemme 1.1.4.30, il en est de même pour les modules N^{2k}, N^{2k+1} .

Cela conclut la récurrence. □

Remarque 4.3.3.6. *Le foncteur $\tilde{\Sigma}$ est exact à gauche. De plus, si R est un module instable réduit, alors $\tilde{\Sigma}R = 0$. Par définition, on a*

$$\begin{aligned} R^*(\tilde{\Sigma})(F(1)) &\cong H^*(\tilde{\Sigma}(I^\bullet, \partial^\bullet)) \\ &\cong H^*(\tilde{\Sigma}(R^\bullet \oplus N^\bullet, \partial^\bullet)) \\ &\cong H^*(\tilde{\Sigma}(N^\bullet, \partial_n^\bullet)). \end{aligned}$$

De plus les isomorphismes suivants ont lieu :

$$\text{Ext}_{\mathcal{U}}^n(\Sigma\mathbb{F}_2, F(1)) \cong H_*(\text{Hom}_{\mathcal{U}}(\Sigma\mathbb{F}_2, I^\bullet))$$

$$\begin{aligned}
 &\cong H^* \left(\text{Hom}_{\mathcal{U}} \left(\mathbb{F}_2, \tilde{\Sigma} I^\bullet \right) \right) \\
 &\cong H^* \left(\text{Hom}_{\mathcal{U}} \left(\mathbb{F}_2, \tilde{\Sigma} N^\bullet \right) \right) \\
 &\cong \left(H^* \left(\tilde{\Sigma} N^\bullet \right) \right)^0.
 \end{aligned}$$

On rappelle que la dimension sur \mathbb{F}_2 du groupe $\text{Ext}_{\mathcal{U}}^i(\Sigma^n \mathbb{F}_2, M)$ détermine le nombre de copies du module $J(n)$ dans le terme i -ième de la résolution injective minimale de M . Alors, les lemmes et corollaires suivants sont essentiels pour calculer les premiers termes des résolutions injectives minimales de $\Sigma^{2^n} \mathbb{F}_2$ et de H_n .

Lemme 4.3.3.7. *Soient deux entiers m, n . On a :*

$$\text{Ext}_{\mathcal{U}}^1 \left(\Sigma^m \mathbb{F}_2, \Sigma^{2^n} \mathbb{F}_2 \right) \cong \begin{cases} \mathbb{F}_2 & \text{si } m = 2^n - 2^i, 0 \leq i \leq n-1, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Démonstration. Une extension de $\Sigma^{2^n} \mathbb{F}_2$ par $\Sigma^m \mathbb{F}_2$ correspond à une opération de Steenrod θ de degré $2^n - m$:

$$\begin{array}{ccc}
 \Sigma^{2^n} \mathbb{F}_2 & \hookrightarrow & \Sigma^{2^n} \mathbb{F}_2 \\
 & \theta \nearrow & \\
 & \Sigma^m \mathbb{F}_2 & \twoheadrightarrow \Sigma^m \mathbb{F}_2
 \end{array}$$

Cette opération doit être indécomposable donc $\theta = Sq^{2^i}$. Il en résulte que $2^n - m = 2^i$. D'autre part, par l'instabilité on a $2^i \leq m$. Il entraîne que $2^n = m + 2^i \leq 2m$. Or $m \geq 2^{n-1}$. Autrement dit $0 \leq i \leq n-1$. Le lemme en découle. \square

Corollaire 4.3.3.8. *Soient deux entiers m, n . On a :*

$$\text{Ext}_{\mathcal{U}}^1 \left(\Sigma^m \mathbb{F}_2, H_{n+1} \right) \cong \begin{cases} \mathbb{F}_2 & \text{si } m = 2^n - 2^i, 0 \leq i \leq n-2, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Démonstration. On raisonne par récurrence sur n .

1. Puisque $H_1 \cong \Sigma^0 \mathbb{F}_2$, le lemme est vérifié pour $n = 0$. Supposons que le lemme reste vrai pour tout $n < k$. On passe au cas $n = k$.
2. La suite exacte courte

$$0 \rightarrow \Sigma^{2^n} \mathbb{F}_2 \rightarrow H_{n+1} \rightarrow H_n \rightarrow 0$$

induit la suite exacte

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & \text{Hom}_{\mathcal{U}} \left(\Sigma^m \mathbb{F}_2, \Sigma^{2^n} \mathbb{F}_2 \right) & & & & \\
 & & \downarrow & & & & \\
 & & \text{Hom}_{\mathcal{U}} \left(\Sigma^m \mathbb{F}_2, H_{n+1} \right) & \longrightarrow & \text{Hom}_{\mathcal{U}} \left(\Sigma^m \mathbb{F}_2, H_n \right) & & \\
 & & & & \downarrow & & \\
 & & & & \text{Ext}_{\mathcal{U}}^1 \left(\Sigma^m \mathbb{F}_2, \Sigma^{2^n} \mathbb{F}_2 \right) & \longrightarrow & \text{Ext}_{\mathcal{U}}^1 \left(\Sigma^m \mathbb{F}_2, H_{n+1} \right) \\
 & & & & & & \downarrow \\
 & & & & & & \text{Ext}_{\mathcal{U}}^1 \left(\Sigma^m \mathbb{F}_2, H_n \right) \longrightarrow \dots
 \end{array}$$

On en déduit que

$$\mathrm{Ext}_{\mathcal{U}}^1(\Sigma^m \mathbb{F}_2, H_{n+1}) \cong \begin{cases} \mathbb{F}_2 & \text{si } m = 2^n - 2^i, 0 \leq i \leq n-2, \\ 0 & \text{si } m \neq 2^n - 2^i, 0 \leq i \leq n-1. \end{cases}$$

La suite exacte courte

$$0 \rightarrow \Phi H_n \rightarrow H_{n+1} \rightarrow \Sigma \mathbb{F}_2 \rightarrow 0$$

entraîne l'isomorphisme

$$\mathrm{Ext}_{\mathcal{U}}^1(\Sigma^{2^{n-1}} \mathbb{F}_2, \Phi H_n) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ext}_{\mathcal{U}}^1(\Sigma^{2^{n-1}} \mathbb{F}_2, H_{n+1}).$$

De manière analogue on a

$$\mathrm{Ext}_{\mathcal{U}}^1(\Sigma^{2^{n-1}} \mathbb{F}_2, \Phi^{n-1} H_2) \cong \mathrm{Ext}_{\mathcal{U}}^1(\Sigma^{2^{n-1}} \mathbb{F}_2, H_{n+1}).$$

Il résulte de la suite exacte courte

$$0 \rightarrow \Phi^n H_1 \rightarrow \Phi^{n-1} H_2 \rightarrow \Sigma \mathbb{F}_2 \rightarrow 0$$

qu'on a l'injection

$$\mathrm{Ext}_{\mathcal{U}}^1(\Sigma^{2^{n-1}} \mathbb{F}_2, \Phi^{n-1} H_2) \hookrightarrow \mathrm{Ext}_{\mathcal{U}}^1(\Sigma^{2^{n-1}} \mathbb{F}_2, \Sigma^{2^{n-1}} \mathbb{F}_2) \cong 0.$$

Il en résulte que $\mathrm{Ext}_{\mathcal{U}}^1(\Sigma^{2^{n-1}} \mathbb{F}_2, \Phi^{n-1} H_2) = 0$ et on a donc $\mathrm{Ext}_{\mathcal{U}}^1(\Sigma^{2^{n-1}} \mathbb{F}_2, H_{n+1}) = 0$.

Le lemme en résulte. \square

De même manière, en utilisant la proposition 3.2.1.12 on obtient :

Lemme 4.3.3.9. *Pour tout entier n on a :*

$$\mathrm{Ext}_{\mathcal{U}}^2(\Sigma^{2^n - j} \mathbb{F}_2, H_{n+1}) = \begin{cases} \mathbb{F}_2 & \text{si } j = 2^k + 2^{k-t}, 0 \leq k \leq n-2, 2 \leq t, \\ \mathbb{F}_2 & \text{si } j = 2^{n-1}, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Corollaire 4.3.3.10. *L'enveloppe injective de H_{n+1} est $J(2^n)$, celle de $J(2^n)/H_{n+1}$ est*

$$\bigoplus_{i=0}^{n-2} J(2^n - 2^i)$$

et le module I^2 dans la résolution injective minimale $\{I^j\}$ de H_{n+1} est

$$J(2^{n-1}) \oplus \bigoplus_{\substack{0 \leq i \leq n-2 \\ 2 \leq j}} J(2^n - 2^i - 2^{i-j}).$$

Démonstration. On note $I^0 \rightarrow I^1$ les deux premiers termes de la résolution injective minimale de H_{n+1} . L'enveloppe injective de H_{n+1} est $J(2^n)$ et celle de $J(2^n)/H_{n+1}$ est I^1 . Puisque H_{n+1}

est fini, I^1 est une somme directe finie de modules de Brown-Gitler. D'après le corollaire 4.3.3.8, chaque module $J(2^n - 2^i)$ apparaît une seule fois dans I^1 . De manière analogue on obtient I^2 et le résultat suit. \square

Le lemme suivant donne un premier contrôle sur les modules N^i de la partie nilpotente de la résolution injective minimale de $F(1)$.

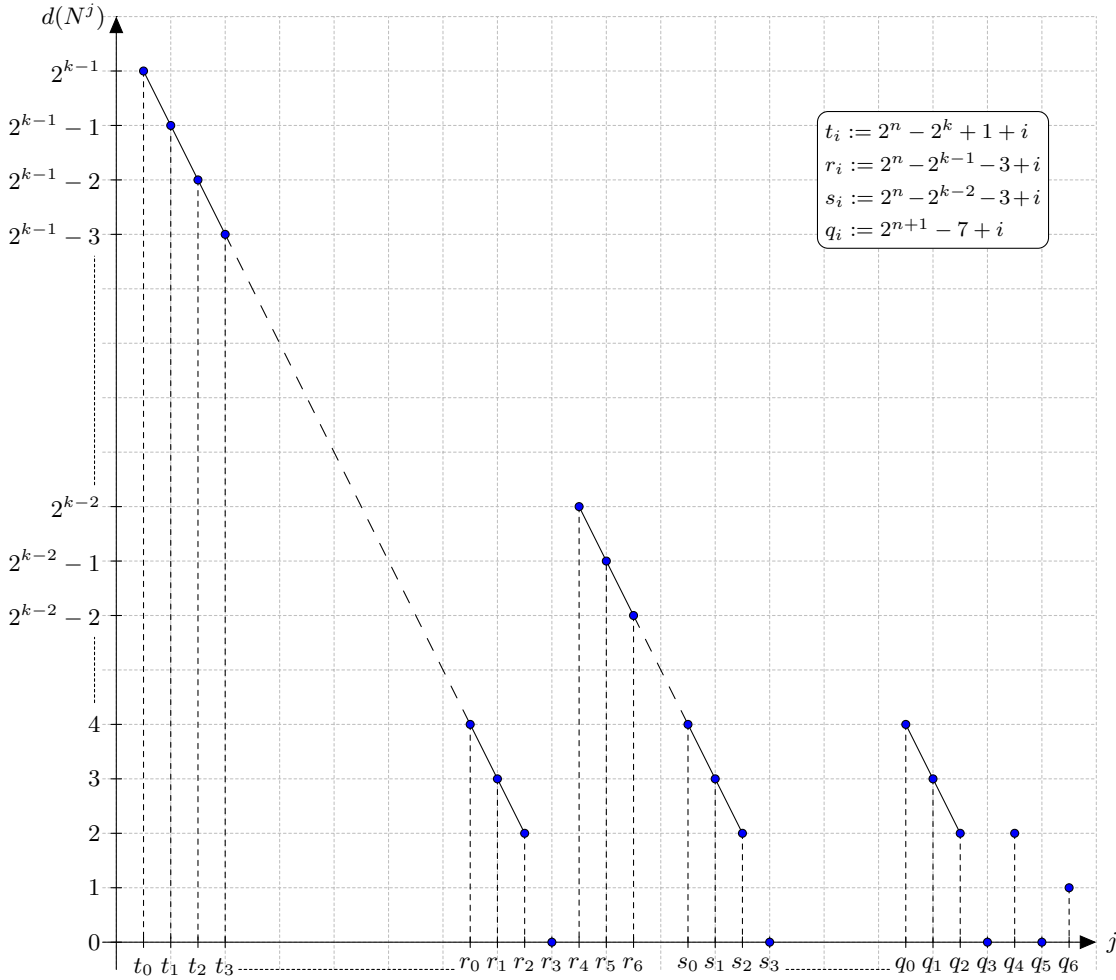
Lemme 4.3.3.11. *Soient deux entiers $n > k \geq 1$. Alors les égalités suivantes ont lieu*

$$N^{2^n - 2^k - 1} = J(1), \quad N^{2^n - 2^k} = 0, \quad N^{2^n - 2^k + 1} = J(2^{k-1}).$$

Supposons de plus que $k \geq 3$; soit m un entier tel que $2^{k-1} - 1 \geq m \geq 2$, alors on a

$$d(N^{2^n - 2^k + m}) = 2^{k-1} - m + 1 \text{ et } (N^{2^n - 2^k + m})^{2^{k-1} - m + 1} = \mathbb{F}_2.$$

En particulier, pour $n > 2$: $d(N^{2^n - 4 + 1}) = 2$ et $(N^{2^n - 4 + 1})^2 = \mathbb{F}_2$.



Il résulte de la preuve du lemme 4.3.3.11 qu'on a :

Corollaire 4.3.3.12. *Soient deux entiers $n > k \geq 1$. L'égalité suivante a lieu :*

$$N^{2^n - 2^k - 1} = J(2).$$

Le lemme 4.3.3.11 montre que c'est souvent le cas où le module N^{2i+1} contient une seule copie de module de Brown-Gitler de type $J(2^k)$ alors que N^{2i} et N^{2i+2} n'en contiennent aucun. Cela est suffisant pour déterminer le groupe $\text{Ext}_{\mathcal{U}}^{2i}(\Phi^k F(1), F(1))$:

Proposition 4.3.3.13. *Soit i un entier. Dans la partie nilpotente $\{N^\bullet\}$ de la résolution injective minimale de $F(1)$, on suppose que N^{2i} et N^{2i+2} ne contiennent pas de modules de Brown-Gitler de type $J(2^k)$ et N^{2i+1} est une somme directe de $J(2^n)$ avec des modules de type $J(2^j(2k+1))$. Alors*

$$\text{Ext}_{\mathcal{U}}^{2i}(\Phi^k F(1), F(1)) \cong \begin{cases} 0 & \text{si } k \leq n, \\ \mathbb{F}_2 & \text{si } k > n. \end{cases}$$

Démonstration. Le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccc} & & 0 & & 0 & & \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \\ \cdots & \xrightarrow{(\partial_n^{2i-1})_*} & \text{Hom}_{\mathcal{U}}(\Phi^k F(1), N^{2i}) & \xrightarrow{(\partial_n^{2i})_*} & \text{Hom}_{\mathcal{U}}(\Phi^k F(1), N^{2i+1}) & \xrightarrow{(\partial_n^{2i+1})_*} & \cdots \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \\ \cdots & \xrightarrow{(\partial_n^{2i-1})_*} & \text{Hom}_{\mathcal{U}}(\Phi^k F(1), I^{2i}) & \xrightarrow{(\partial_n^{2i})_*} & \text{Hom}_{\mathcal{U}}(\Phi^k F(1), I^{2i+1}) & \xrightarrow{(\partial_n^{2i+1})_*} & \cdots \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \\ \cdots & \xrightarrow{(\partial_r^{2i-1})_*} & \text{Hom}_{\mathcal{U}}(\Phi^k F(1), R^{2i}) & \xrightarrow{(\partial_r^{2i})_*} & \text{Hom}_{\mathcal{U}}(\Phi^k F(1), R^{2i+1}) & \xrightarrow{(\partial_r^{2i+1})_*} & \cdots \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \\ & & 0 & & 0 & & \end{array}$$

dont chaque colonne est une suite exacte courte, induit la suite exacte longue

$$\begin{array}{ccc} 0 = \text{Hom}_{\mathcal{U}}(\Phi^k F(1), N^{2i}) & & \\ \downarrow & & \\ \text{Ext}_{\mathcal{U}}^{2i}(\Phi^k F(1), F(1)) & \longrightarrow & (\ell^{2i}(F(1)))^1 \\ & & \downarrow \alpha \\ & & \text{Hom}_{\mathcal{U}}(\Phi^k F(1), N^{2i+1}) \longrightarrow \text{Ext}_{\mathcal{U}}^{2i+1}(\Phi^k F(1), F(1)) \\ & & \downarrow \\ & & (\ell^{2i+1}(F(1)))^1 = 0 \end{array}$$

Si $k \leq n$, on a

$$\text{Hom}_{\mathcal{U}}(\Phi^k F(1), N^{2i+1}) \cong \text{Hom}_{\mathcal{U}}(\Phi^k F(1), J(2^n)) \cong \langle x_{n-k}^{2^k} \rangle \cong \mathbb{F}_2.$$

Parce que $\ell^{2i}(F(1)) \cong \langle u, u^2, \dots, u^{2^{\lfloor \log_2 i \rfloor - 1}} \mid u \in I_{(1)} \subset I^{2i} \rangle$ et que $\partial^{2i}(u^{2^k}) = x_{n-k}^{2^k}$ alors la flèche α est l'isomorphisme $\mathbb{F}_2 \xrightarrow{\sim} \mathbb{F}_2$. On a donc

$$\text{Ext}_{\mathcal{U}}^{2i}(\Phi^k F(1), F(1)) \cong 0.$$

Si $k \geq n + 1$, il résulte de l'isomorphisme $\text{Hom}_{\mathcal{U}}(\Phi^k F(1), N^{2i+1}) \cong 0$ que

$$\text{Ext}_{\mathcal{U}}^{2i+1}(\Phi^k F(1), F(1)) \cong 0$$

et que

$$\text{Ext}_{\mathcal{U}}^{2i}(\Phi^k F(1), F(1)) \cong (\ell^{2i}(F(1)))^1 \cong \mathbb{F}_2$$

d'où le résultat. \square

4.3.3.2 Les résultats

On énonce ci-dessous les résultats principaux de ce chapitre.

Théorème 4.3.3.14. *Étant donnés $n > k \geq 2$. Les modules $N^{2^n-2^k}$ sont triviaux. De plus on a :*

$$N^{2^n-2^k+j} = \begin{cases} J(2^{k-1}) & \text{si } j = 1, \\ \bigoplus_{i=0}^{k-2} J(2^{k-1}-2^i) & \text{si } j = 2. \end{cases}$$

On obtient ainsi :

$$N^{2^n-2^k-j} = \begin{cases} J(1) & \text{si } j = 1, \\ 0 & \text{si } j = 2, \\ J(2) & \text{si } j = 3. \end{cases}$$

Théorème 4.3.3.15 (Périodicité). *Étant donné $n > k \geq 2$ on a :*

$$N^{2^n-2^k+t} = N^{2^k+t}$$

pour tout $0 \leq t \leq 2^{k-1} - 1$.

Notation 4.3.3.16. *On note :*

$$J(n_1, \dots, n_k)^t = J \begin{pmatrix} n_1 \\ \vdots \\ n_k \end{pmatrix} := \bigoplus_{i=1}^k J(n_k).$$

Théorème 4.3.3.17. *Le tableau suivant montre les calculs de la partie nilpotente N^k de la résolution injective minimale de $F(1)$ pour $k \leq 44$.*

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8
N^k	0	0	0	$J(1)$	0	$J(2)$	0	$J(1)$	0
k	9	10	11	12	13	14	15	16	17
N^k	$J(4)$	$J(3)$	$J(2)$	0	$J(2)$	0	$J(1)$	0	$J(8)$
k	18	19	20	21	22	23	24	25	26
N^k	$J(\binom{7}{6})$	$J(\binom{6}{4})$	$J(5)$	$J(4)$	$J(3)$	$J(2)$	0	$J(4)$	$J(3)$
k	27	28	29	30	31	32	33	34	35

N^k	$J(2)$	0	$J(2)$	0	$J(1)$	0	$J(16)$	$J\left(\begin{smallmatrix} 15 \\ 14 \\ 12 \end{smallmatrix}\right)$	$J\left(\begin{smallmatrix} 14 \\ 12 \\ 11 \\ 10 \\ 8 \end{smallmatrix}\right)$
k	36	37	38	39	40	41	42	43	44
N^k	?	?	?	?	?	$J(8)$	$J\left(\begin{smallmatrix} 7 \\ 6 \end{smallmatrix}\right)$	$J\left(\begin{smallmatrix} 6 \\ 4 \end{smallmatrix}\right)$	$J(5)$

Plus généralement, pour $n \geq 5$ on a :

k	$2^n - 23$	$2^n - 22$	$2^n - 21$	$2^n - 20$	$2^n - 19$	$2^n - 18$	$2^n - 17$
N^k	$J(8)$	$J\left(\begin{smallmatrix} 7 \\ 6 \end{smallmatrix}\right)$	$J\left(\begin{smallmatrix} 6 \\ 4 \end{smallmatrix}\right)$	$J(5)$	$J(4)$	$J(3)$	$J(2)$
k	$2^n - 16$	$2^n - 15$	$2^n - 14$	$2^n - 13$	$2^n - 12$	$2^n - 11$	$2^n - 10$
N^k	0	$J(8)$	$J\left(\begin{smallmatrix} 7 \\ 6 \end{smallmatrix}\right)$	$J\left(\begin{smallmatrix} 6 \\ 4 \end{smallmatrix}\right)$	$J(5)$	$J(4)$	$J(3)$
k	$2^n - 9$	$2^n - 8$	$2^n - 7$	$2^n - 6$	$2^n - 5$	$2^n - 4$	$2^n - 3$
N^k	$J(2)$	0	$J(4)$	$J(3)$	$J(2)$	0	$J(2)$
k	$2^n - 2$	$2^n - 1$	2^n	$2^n + 1$	$2^n + 2$	$2^n + 3$	$2^n + 4$
N^k	0	$J(1)$	0	$J(2^{n-1})$	$J\left(\begin{smallmatrix} 2^{n-1}-1 \\ 2^{n-1}-2 \\ \vdots \\ 2^{n-1}-2^{n-3} \end{smallmatrix}\right)$	$J(2^{n-2}) \oplus A_{2^n+3}$?

A_{2^n+3} désignant

$$\bigoplus_{\substack{0 \leq i \leq n-2 \\ 2 \leq j}} J(2^n - 2^i - 2^{i-j}).$$

Théorème 4.3.3.18. Pour $n > k \geq 2$ et $-16 \leq t \leq 2$ on a des monomorphismes

$$\text{Ext}_{\mathcal{U}}^{2^n-2^k+t}(\Phi^r F(1), \Phi^r F(1)) \hookrightarrow \text{Ext}_{\mathcal{U}}^{2^n-2^k+t}(\Phi^{r+1} F(1), \Phi^{r+1} F(1))$$

pour tout r .

Notation 4.3.3.19. Soient d un entier pair et $2^{n_1} + \dots + 2^{n_k}$ son expression 2-adique. On note :

$$v(d) = 1 + n_k - k.$$

Théorème 4.3.3.20. Pour $d = 2^n - t$, où $n \geq 5$ et $-16 \leq t \leq 2$, on a :

$$\text{Ext}_{\mathcal{U}}^d(\Phi^r F(1), \Phi^r F(1)) = \begin{cases} 0 & \text{si } 2 \nmid d, \\ 0 & \text{si } 2 \mid d \text{ et } r < v(d), \\ \mathbb{F}_2 & \text{sinon.} \end{cases}$$

De plus, il y a des monomorphismes

$$\text{Ext}_{\mathcal{U}}^d(\Phi^r F(1), \Phi^r F(1)) \hookrightarrow \text{Ext}_{\mathcal{U}}^d(\Phi^{r+1} F(1), \Phi^{r+1} F(1)).$$

On peut donc conjecturer :

Conjecture 4.3.3.1. Soit d un entier, on a :

$$\mathrm{Ext}_{\mathcal{U}}^d(\Phi^r F(1), \Phi^r F(1)) = \begin{cases} 0 & \text{si } 2 \nmid d, \\ 0 & \text{si } 2 \mid d \text{ et } r < v(d), \\ \mathbb{F}_2 & \text{sinon.} \end{cases}$$

De plus, il y a des monomorphismes

$$\mathrm{Ext}_{\mathcal{U}}^d(\Phi^r F(1), \Phi^r F(1)) \hookrightarrow \mathrm{Ext}_{\mathcal{U}}^d(\Phi^{r+1} F(1), \Phi^{r+1} F(1))$$

pour tout r .

4.4 Les preuves des résultats principaux

Démonstration du théorème 4.3.3.14. D'après le lemme 4.3.3.11, il ne reste qu'à vérifier que $N^{2^n-2^k+2} = \bigoplus_{i=0}^{k-2} J(2^{k-1} - 2^i)$.

Il découle du corollaire 4.3.3.5 que le module $N^{2^n-2^k+2}$ est l'enveloppe injective de $\mathrm{Ker}(\psi_{2^n-2^k})$. Ce module est déterminée par la suite exacte

$$0 \longrightarrow \ell^{2^n-2^k}(F(1)) \longrightarrow \mathrm{Coker}\left(\partial_n^{2^n-2^k}\right) \longrightarrow \mathrm{Ker}(\psi_{2^n-2^k}) \longrightarrow 0.$$

Le module $N^{2^n-2^k+2}$ est donc l'enveloppe injective du quotient $J(2^{k-1})/\mathrm{H}_k$. Il résulte du corollaire 4.3.3.10 que

$$N^{2^n-2^k+2} = \bigoplus_{i=0}^{k-2} J(2^{k-1} - 2^i).$$

Cela conclut le théorème. □

4.4.1 La périodicité de la résolution injective minimale de $F(1)$

Notation 4.4.1.1. Soient deux entiers $n > k \geq 2$. On note :⁹

$$e(n, k) = e_{n-2}e_{n-3} \dots e_k.$$

Le cup-produit avec $e(n, k)$ est l'isomorphisme [FLS94]

$$\mathrm{Ext}_{\mathcal{F}}^0(I, I) \xrightarrow{\smile e(n, k)} \mathrm{Ext}_{\mathcal{F}}^{2^n-2^{k+1}}(I, I). \quad (4.4.1)$$

On note $\gamma : I \hookrightarrow f(R^0)$ le morphisme qui représente $e_0 \in \mathrm{Ext}_{\mathcal{F}}^0(I, I)$ et $\delta : I \rightarrow f(R^{2^n-2^{k+1}})$ celui qui représente $e(n, k) \in \mathrm{Ext}_{\mathcal{F}}^{2^n-2^{k+1}}(I, I)$. Puisque $(f(R^*), f(\partial^*))$ est une résolution injective dans \mathcal{F} du foncteur I , l'isomorphisme 4.4.1 signifie qu'il existe un morphisme $\gamma_0 : f(R^0) \rightarrow f(R^{2^n-2^{k+1}})$ tel que $\delta = \gamma_0 \circ \gamma$. Grâce à l'exactitude de la suite

$$I \hookrightarrow f(R^0) \rightarrow f(R^1) \rightarrow \dots \rightarrow f(R^n) \rightarrow \dots$$

9. Voir le théorème 4.3.1.7, page 119 pour la définition des éléments e_i .

et à l'injectivité des modules $f(R^i)$, on a le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 I & \hookrightarrow & f(R^0) & \longrightarrow & f(R^1) & \longrightarrow & f(R^2) & \longrightarrow & \dots & \longrightarrow & f(R^{2^k+1}) & \longrightarrow & f(R^{2^k+2}) \\
 & & \downarrow 1 & & \downarrow & & \downarrow e_0 & & & & \downarrow e_0 e_{k-1} & & \downarrow \\
 & & \downarrow \gamma_0 & & \downarrow \gamma_1 & & \downarrow \gamma_2 & & & & \downarrow \gamma_{2^k+1} & & \downarrow \gamma_{2^k+2} \\
 & & \downarrow e(n,k) & & & & \downarrow e(n,k)e_0 & & & & \downarrow e(n,k)e_0 e_{k-1} & & \downarrow \\
 & & f(R^{2^n-2^k+1}) & \longrightarrow & f(R^{2^n-2^k+1+1}) & \longrightarrow & f(R^{2^n-2^k+1+2}) & \longrightarrow & \dots & \longrightarrow & f(R^{2^n-2^k+1}) & \longrightarrow & f(R^{2^n-2^k+2})
 \end{array} \quad (4.4.2)$$

En appliquant le foncteur m à ce diagramme, on obtient le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 F(1) & \hookrightarrow & R^0 & \longrightarrow & R^1 & \longrightarrow & R^2 & \longrightarrow & \dots & \longrightarrow & R^{2^k+1} & \longrightarrow & R^{2^k+2} \\
 & & \downarrow \alpha_0 & & \downarrow \alpha_1 & & \downarrow \alpha_2 & & & & \downarrow \alpha_{2^k+1} & & \downarrow \alpha_{2^k+2} \\
 & & R^{2^n-2^k+1} & \longrightarrow & R^{2^n-2^k+1+1} & \longrightarrow & R^{2^n-2^k+1+2} & \longrightarrow & \dots & \longrightarrow & R^{2^n-2^k+1} & \longrightarrow & R^{2^n-2^k+2}
 \end{array} \quad (4.4.3)$$

On remarque que pour $0 \leq t \leq 2^{k-1} - 1$, on a

$$H^{2^k+t}(R^\bullet, \partial_r^\bullet) = \ell^{2^k+t}(F(1)) = \ell^{2^n-2^k+t}(F(1)) = H^{2^n-2^k+t}(R^\bullet, \partial_r^\bullet).$$

Parce que, d'une part

$$\begin{aligned}
 \left\langle [u^{2^i} \in R^{2^k+t}], 0 \leq i \leq r-1 \right\rangle &\cong \ell^{2^k+t}(F(1)) \\
 &\cong H_r \\
 &\cong \ell^{2^n-2^k+t}(F(1)) \\
 &\cong \left\langle [u^{2^i} \in R^{2^n-2^k+t}], 0 \leq i \leq r-1 \right\rangle
 \end{aligned}$$

si $t = 2^r(2l+1)$, d'autre part si tel est le cas $\alpha_{2^k+t}(u) = u$, donc le morphisme α_{2^k+t} induit l'isomorphisme

$$\ell^{2^k+t}(F(1)) \xrightarrow{\sim} \ell^{2^n-2^k+t}(F(1)).$$

Démonstration du théorème 4.3.3.15. Comme les modules $N^{2^n-2^k}$ et N^{2^k} sont triviaux¹⁰, on a

$$\begin{aligned}
 \text{Coker}(\partial_r^{2^k}) &\cong \text{Coker}(\partial^{2^k}) \\
 \text{Coker}(\partial_r^{2^n-2^k}) &\cong \text{Coker}(\partial^{2^n-2^k}).
 \end{aligned}$$

Comme le module $I^{2^n-2^k+1}$ est injectif, il existe $\beta_{2^k+1} : I^{2^k+1} \rightarrow I^{2^n-2^k+1}$ qui fait commuter le

10. Voir le lemme 4.3.3.11, page 128.

diagramme

$$\begin{array}{ccccccc}
 I^{2^k} & \xrightarrow{\partial^{2^k}} & \text{Coker}(\partial^{2^k}) & \hookrightarrow & I^{2^k+1} & \longrightarrow & R^{2^k+1} \\
 \downarrow \alpha_{2^k} & & \downarrow \alpha_{2^k} & & \downarrow \exists \beta_{2^k+1} & & \downarrow \alpha_{2^k+1} \\
 I^{2^n-2^k} & \xrightarrow{\partial^{2^n-2^k}} & \text{Coker}(\partial^{2^n-2^k}) & \hookrightarrow & I^{2^n-2^k+1} & \longrightarrow & R^{2^n-2^k+1}
 \end{array} \quad (4.4.4)$$

Parce que, d'une part

$$N^{2^k+1} = J(2^{k-1}) = N^{2^n-2^k+1}$$

et d'autre part

$$\partial^{2^k}(u) = x_{k-1} = \partial^{2^n-2^k}(u)$$

on obtient le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc}
 N^{2^k+1} & \hookrightarrow & I^{2^k+1} & \longrightarrow & R^{2^k+1} \\
 \parallel & & \downarrow \beta_{2^k+1} & & \downarrow \alpha_{2^k+1} \\
 N^{2^n-2^k+1} & \hookrightarrow & I^{2^n-2^k+1} & \longrightarrow & R^{2^n-2^k+1}
 \end{array}$$

On démontrera par récurrence sur t qu'il existe des morphismes $\beta_{2^k+t} : I^{2^k+t} \rightarrow I^{2^n-2^k+t}$ induisant les isomorphismes $N^{2^n-2^k+t} = N^{2^k+t}$.

1. Le cas $t = 1$ a été vérifié précédemment.
2. Supposons qu'on a montré l'existence des morphismes $\beta_{2^k+t} : I^{2^k+t} \rightarrow I^{2^n-2^k+t}$ pour tout $1 \leq t < m < 2^{k-1} - 1$, on passe au cas $t = m$. Compte tenu du fait que $I^{2^n-2^k+m}$ est injectif, l'existence des morphismes $\beta_{2^k+l} : I^{2^k+l} \rightarrow I^{2^n-2^k+l}$ avec $l = m-2, m-1$ tels que

$$\beta_{2^k+m-1} \circ \partial^{2^k+m-2} = \partial^{2^n-2^k+m-2} \circ \beta_{2^k+m-2},$$

induit un morphisme $\beta_{2^k+m} : I^{2^k+m} \rightarrow I^{2^n-2^k+m}$ faisant commuter le diagramme

$$\begin{array}{ccc}
 I^{2^k+m-1} & \xrightarrow{\partial^{2^k+m-1}} & I^{2^k+m} \\
 \downarrow \beta_{2^k+m-1} & & \downarrow \beta_{2^k+m} \\
 I^{2^n-2^k+m-1} & \xrightarrow{\partial^{2^n-2^k+m-1}} & I^{2^n-2^k+m}
 \end{array}$$

Par l'hypothèse de récurrence ce morphisme induit le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccc}
 \ell^{2^k+m-2}(F(1)) & \hookrightarrow & \text{Coker}(\partial_n^{2^k+m-2}) & \longrightarrow & \text{Ker}(\psi_{2^k+m-2}) & \twoheadrightarrow & \ell^{2^k+m-1}(F(1)) \\
 \parallel & & \parallel & & \downarrow & & \parallel \\
 \ell^{2^n-2^k+m-2}(F(1)) & \hookrightarrow & \text{Coker}(\partial_n^{2^n-2^k+m-2}) & \longrightarrow & \text{Ker}(\psi_{2^n-2^k+m-2}) & \twoheadrightarrow & \ell^{2^n-2^k+m-1}(F(1))
 \end{array}$$

Il s'ensuit que $N^{2^n-2^k+m} = N^{2^k+m}$ et le théorème en découle. \square

4.4.2 Le cas de $N^{2^k+3}, k \geq 2$

D'après le théorème 4.3.3.14, les modules N^{2^k}, N^{2^k+1} et N^{2^k+2} sont déterminés. Cependant, la détermination de N^{2^k+3} provoque plus de difficulté que ces derniers. Cela provient de la détermination de l'extension

$$0 \longrightarrow \text{Coker} \left(\partial_n^{2^k+1} \right) \longrightarrow \text{Ker} \left(\psi_{2^k+1} \right) \longrightarrow \ell^{2^k+2}(F(1)) \longrightarrow 0.$$

Comme $\ell^{2^k+2}(F(1)) \cong H_1 = \Sigma \mathbb{F}_2$, on a $\text{Ker} \left(\psi_{2^k+1} \right) \in \text{Ext}_{\mathcal{U}}^1 \left(\Sigma \mathbb{F}_2, \text{Coker} \left(\partial_n^{2^k+1} \right) \right)$. En s'appuyant sur la résolution projectif¹¹ de $\Sigma \mathbb{F}_2$, on peut calculer le groupe $\text{Ext}_{\mathcal{U}}^1 \left(\Sigma \mathbb{F}_2, \text{Coker} \left(\partial_n^{2^k+1} \right) \right)$ et en déduire que l'extension $\text{Ker} \left(\psi_{2^k+1} \right)$ est non-triviale. Cela donne la première approche à la détermination des modules N^{2^k+3} .

4.4.2.1 Première approche

Lemme 4.4.2.1. *On a*

$$\text{Ext}_{\mathcal{U}}^1 \left(H_1, \text{Coker} \left(\partial_n^{2^k+1} \right) \right) = \mathbb{F}_2.$$

Démonstration. Comme N^{2^k+2} est injectif, la suite exacte courte

$$0 \rightarrow \text{Im} \left(\partial_n^{2^k+1} \right) \rightarrow N^{2^k+2} \rightarrow \text{Coker} \left(\partial_n^{2^k+1} \right) \rightarrow 0$$

implique l'isomorphisme

$$\text{Ext}_{\mathcal{U}}^1 \left(H_1, \text{Coker} \left(\partial_n^{2^k+1} \right) \right) \cong \text{Ext}_{\mathcal{U}}^2 \left(H_1, \text{Im} \left(\partial_n^{2^k+1} \right) \right).$$

Il résulte de la suite exacte courte

$$0 \rightarrow H_k \hookrightarrow J(2^{k-1}) \twoheadrightarrow \text{Im} \left(\partial_n^{2^k+1} \right) \rightarrow 0$$

qu'on a

$$\begin{aligned} \text{Ext}_{\mathcal{U}}^2 \left(H_1, \text{Im} \left(\partial_n^{2^k+1} \right) \right) &\cong \text{Ext}_{\mathcal{U}}^3 \left(H_1, H_k \right) \\ &\cong \text{Ext}_{\mathcal{U}}^3 \left(\Sigma \mathbb{F}_2, H_k \right). \end{aligned}$$

Le lemme découle de la résolution projective de H_1 en remarquant que $\text{Ext}_{\mathcal{U}}^3 \left(\Sigma \mathbb{F}_2, H_k \right) \cong \mathbb{F}_2$. \square

Proposition 4.4.2.2. *Pour $k \geq 2$ l'extension $\text{Ker} \left(\psi_{2^k+1} \right) \in \text{Ext}_{\mathcal{U}}^1 \left(H_1, \text{Coker} \left(\partial_n^{2^k+1} \right) \right)$ est non-triviale et l'enveloppe injective de $\text{Coker} \left(\partial_n^{2^k+1} \right)$ est celle de $\text{Ker} \left(\psi_{2^k+1} \right)$.*

Démonstration. On suppose par absurde que $\text{Ker} \left(\psi_{2^k+1} \right) \in \text{Ext}_{\mathcal{U}}^1 \left(H_1, \text{Coker} \left(\partial_n^{2^k+1} \right) \right)$ est triviale. Le module N^{2^k+3} contient donc $J(1)$ comme un facteur direct. Il s'ensuit que

$$\mathbb{F}_2 \cong \text{Hom}_{\mathcal{U}} \left(\Sigma \mathbb{F}_2, J(1) \right) \subset \text{Ext}_{\mathcal{U}}^{2^k+3} \left(\Sigma \mathbb{F}_2, F(1) \right)$$

11. Voir le corollaire 1.1.4.17, page 26.

ce qui contredit la trivialité du groupe $\text{Ext}_{\mathcal{U}}^{2^k+3}(\Sigma\mathbb{F}_2, F(1))$. On note I_0 l'enveloppe injective de $\text{Coker}(\partial_n^{2^k+1})$ et I_1 celle de $\text{Ker}(\psi_{2^k+1})$. On constate que $I_0 \subset I_1$. La suite exacte courte

$$0 \rightarrow \text{Coker}(\partial_n^{2^k+1}) \rightarrow \text{Ker}(\psi_{2^k+1}) \rightarrow H_1 \rightarrow 0$$

montre que $I_1 \subset I_0 \oplus H_1$. Compte tenu du fait que l'extension est non-triviale, cette inclusion n'est pas stricte. On en déduit que $I_0 \cong I_1$. \square

Corollaire 4.4.2.3. *La suite*

$$N^{2^n-2^k+1} \xrightarrow{\partial_n^{2^n-2^k+1}} N^{2^n-2^k+2} \xrightarrow{\partial_n^{2^n-2^k+2}} N^{2^n-2^k+3}$$

fournit trois premiers termes de la résolution injective minimale de H_k .

D'après le corollaire 4.3.3.10 on a donc :

Corollaire 4.4.2.4. *On a :*

$$N^{2^n-2^k+3} \cong J(2^{k-2}) \oplus \bigoplus_{\substack{0 \leq i \leq k-3 \\ 2 \leq j}} J(2^{k-1} - 2^i - 2^{i-j}).$$

4.4.2.2 Deuxième approche

Puisqu'on ne connaît pas de résolution projective de $\Sigma^n\mathbb{F}_2$ en général, la méthode précédente ne peut être généralisée. La méthode que l'on donne dans cette sous-section est basée sur la connaissance de la partie réduite $(R^\bullet, \partial_r^\bullet)$ de la résolution injective minimale de $F(1)$, ce qui nécessite une traduction de la trivialité ou non-trivialité des extensions $\text{Ker}(\psi_{2^n+1})$. Pour le confort du lecteur on énonce ci-dessous, *ab initio*, la traduction correspondante.

Soit $k = 2^r(2d+1) - 1$. L'extension $\text{Ker}(\psi_k) \in \text{Ext}_{\mathcal{U}}^1(F(1)/\Phi^r F(1), \text{Coker}(\partial_n^k))$ s'insère dans la suite exacte courte

$$0 \rightarrow \text{Coker}(\partial_n^k) \xrightarrow{i} \text{Ker}(\psi_k) \xrightarrow{p} F(1)/\Phi^r F(1) \rightarrow 0.$$

Le module cyclique $F(1)/\Phi^r F(1) = \langle u, u^2, \dots, u^{2^{r-1}} \rangle$ est engendré par l'image de $u \in I_{(1)} \subset R^{k+1}$ via la flèche restreinte $^{12} R^{k+1} \xrightarrow{\omega^{k+1}} N^{k+2}$. Comme le morphisme $R^{k+1} \xrightarrow{\omega^{k+1}} N^{k+2}$ a pour l'image $\text{Ker}(\psi_k) \hookrightarrow N^{k+2}$, on peut noter $[u] \in \text{Ker}(\psi_k)$ le pré-image $\omega^{k+1}(u)$ de $[u] \in F(1)/\Phi^r F(1)$ par abus de notation. Alors, l'extension $\text{Ker}(\psi_k)$ est non-triviale si et seulement si il existe une opération de Steenrod θ telle que $i(v) = \theta[u]$ pour certaine classe $v \in \text{Coker}(\partial_n^k)$. Pour que $\theta[u] = [\theta u]$ soit non-trivial, θ doit être de la forme $Sq^t \dots Sq^{2^{i+1}} Sq^{2^i}$ où $t \geq r-1$. Si tel est le cas, $\theta[u] = [\theta u] = [u^{2^{t+1}}]$ est non-trivial, ce qui nécessite la non-trivialité de $[u^{2^r}]$. Alors :

Proposition 4.4.2.5. *Soit $k = 2^r(2d+1) - 1$. L'extension*

$$\text{Ker}(\psi_k) \in \text{Ext}_{\mathcal{U}}^1(F(1)/\Phi^r F(1), \text{Coker}(\partial_n^k))$$

¹². Voir 4.3.1, page 117 pour la notation ω^{k+1} .

est non-triviale si et seulement si $\omega^{k+1}(u^{2^r})$ est non-trivial.

Dans ce qui suit, on montrera que $\text{Ker}(\psi_{2^k+1})$ est non-triviale. On commence par le cas $k = 3$.

Proposition 4.4.2.6. *L'extension $\text{Ker}(\psi_9)$ est non-triviale donc on a $N^{11} = J(2)$.*

Démonstration. Le module N^{12} est l'enveloppe injective de $\text{Ker}(\psi_9)$. Le dernier est une extension

$$0 \longrightarrow \text{Coker}(\partial_n^9) \longrightarrow \text{Ker}(\psi_9) \longrightarrow \ell^{10}(F(1)) \longrightarrow 0$$

Le morphisme ∂_n^9 est $\bullet Sq^1 : J(4) \rightarrow J(3)$ donc $\text{Coker}(\partial_n^9) \cong \Sigma^2 \mathbb{F}_2$. Alors

$$\text{Ker}(\psi_9) \in \text{Ext}_{\mathcal{U}}^1(\Sigma \mathbb{F}_2, \Sigma^2 \mathbb{F}_2) \cong \mathbb{F}_2.$$

Le module $\text{Coker}(\partial_n^9) \cong \Sigma \mathbb{F}_2$ est engendré par image de $x_0 x_1 \in J(3)$ et le module H_1 est engendré par image de la classe $u \in I_{(1)} \subset R^{10}$. On constate que la suite

$$R^8 \xrightarrow{\partial_r^8} R^9 \xrightarrow{\partial_r^9} R^{10} \xrightarrow{\partial_r^{10}} R^{11}$$

coïncide¹³ à la suite

$$I_{(1)} \xrightarrow{\partial_r^8} I_{(2)} \xrightarrow{\partial_r^9} I_{(1)} \oplus I_{(3,1)} \xrightarrow{\partial_r^{10}} I_{(4)}$$

en degrés majorés par 4. Par connectivité, on a $\partial_r^{10}(u) = 0$ donc $\partial_r^{10}(u^2)$ est trivial. En s'appuyant sur le fait que $H_{10}^2(R^\bullet, \partial_r^\bullet) = 0$ on obtient $r_9 \in R^9$ tel que $\partial_r^9(r_9) = u^2$. Parce que

$$\partial_r^9(Sq^1 r_9) = Sq^1 u^2 = 0,$$

il existe $r_8 \in R^8$ tel que $\partial_r^8(r_8) = Sq^1 r_9$. Puisque $Sq^1 r_9 \neq 0$, alors $r_8 \neq 0$ et donc $r_8 = u^3 \in I_{(1)}$. De plus, parce que $\partial^8(u) = x_2 \in J(4)$, on a $\partial^8(u^4) = x_0^4$ et donc

$$\partial^8(r_8) = \partial^8(u^3) = x_1 x_0^2 + Sq^1 r_9.$$

Par conséquent

$$\partial^9(r_9) = u^2 + x_0 x_1.$$

Il en découle que dans $\text{Ker}(\psi_9)$ on a $Sq^1 u = u^2 = x_0 x_1$. Il s'ensuit que l'extension $\text{Ker}(\psi_9)$ est non-triviale et donc $\text{Ker}(\psi_9) \cong J(2)$. \square

Corollaire 4.4.2.7. *L'extension*

$$0 \longrightarrow \text{Coker}(\partial_n^{2^k+1}) \longrightarrow \text{Ker}(\psi_{2^k+1}) \longrightarrow \ell^{2^k+2}(F(1)) \longrightarrow 0$$

est non-triviale.

Démonstration. On remarque que la suite

$$N^{2^k+1} \xrightarrow{\partial_n^{2^k+1}} N^{2^k+2}$$

13. Voir le lemme 4.3.2.13, page 122.

fournit les deux premiers termes de la résolution injective minimale de H_k . Pour $k \geq 4$ le morphisme non-trivial $H_k \rightarrow H_3$ donne le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & H_k & \longrightarrow & N^{2^k+1} & \xrightarrow{\partial_n^{2^k+1}} & N^{2^k+2} & \xrightarrow{\partial_n^{2^k+2}} & N^{2^k+3} \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & H_3 & \longrightarrow & N^9 & \xrightarrow{\partial_n^9} & N^{10} & \xrightarrow{\partial_n^{10}} & N^{11} \end{array}$$

Il en résulte qu'il existe $0 \neq m_{2^k+1} \in N^{2^k+2}$ et $r_{2^k+1} \in R^{2^k+1}$ tel que

$$\partial^{2^k+1}(r_{2^k+1}) = u^2 + m_{2^k+1}.$$

L'extension $\text{Ker}(\psi_{2^k+1})$ est donc non-triviale. \square

4.4.3 Le cas de $N^{2^k+5}, k \geq 3$

Dans ce paragraphe, on va montrer que l'extension $\text{Ker}(\psi_{2^k+3}) \in \text{Ext}_{\mathcal{U}}^1(H_2, \text{Coker}(\partial_n^{2^k+3}))$ est non-triviale. On maintient la stratégie démontrée dans le paragraphe précédent. Il suffit de montrer qu'il existe un élément non-trivial $n_4 \in N^{2^k+4}$ tel que $u^4 + n_4 \in \text{Im}(\partial^{2^k+3})$.

Dans ce qui suit on va déterminer l'extension de $\ell^{2^k+4}F(1)$ par $\text{Coker}(\partial_n^{2^k+3})$ pour $k \geq 3$. La démonstration du lemme technique suivant est renvoyée à l'appendice A.2, page 144.

Lemme 4.4.3.1. *Pour tous $l < k$ on a*

$$\text{Ext}_{\mathcal{U}}^1(H_1, \text{Coker}(\partial_n^{2^k+1})) \cong \mathbb{F}_2 \cong \text{Ext}_{\mathcal{U}}^1(H_1, \text{Coker}(\partial_n^{2^l+1})).$$

Lemme 4.4.3.2. *On note u le seule élément de degré 1 dans $I_{(1)}$. Il existe un élément non-trivial $n_4 \in N^{2^k+4}$ tel que $u^4 + n_4 \in \text{Im}(\partial^{2^k+3})$.*

Démonstration. On constate que $H_{2^k+4}(R_{\bullet}) = H_2$ donc $H_{2^k+4}^4(R_{\bullet}) = 0$. Compte tenu du fait que tous les modules injectifs réduits indécomposables sont 2-connexes sauf $I_{(1)}$ et que $I_{(1)}$ n'apparaît pas dans les modules R^{2m+1} , on a $\partial_r^{2^k+4}(u) = 0$ donc $u^4 \in \text{Im}(\partial_r^{2^k+3})$. Il existe alors $r_{2^k+3} \in R^{2^k+3}$ tel que $u^4 = \partial_r^{2^k+3}(r_{2^k+3})$. Comme $Sq^1 u^4 = 0$, on déduit de $H_{\bullet}^{2^k+1}(R_{\bullet}) = 0$ qu'il existe $r_{2^k+2} \in R^{2^k+2}$ tel que $Sq^1 r_{2^k+3} = \partial_r^{2^k+2}(r_{2^k+2})$. De manière analogue, il existe $r_{2^k+1} \in R^{2^k+1}$ et $r_{2^k} \in R^{2^k}$ tel que

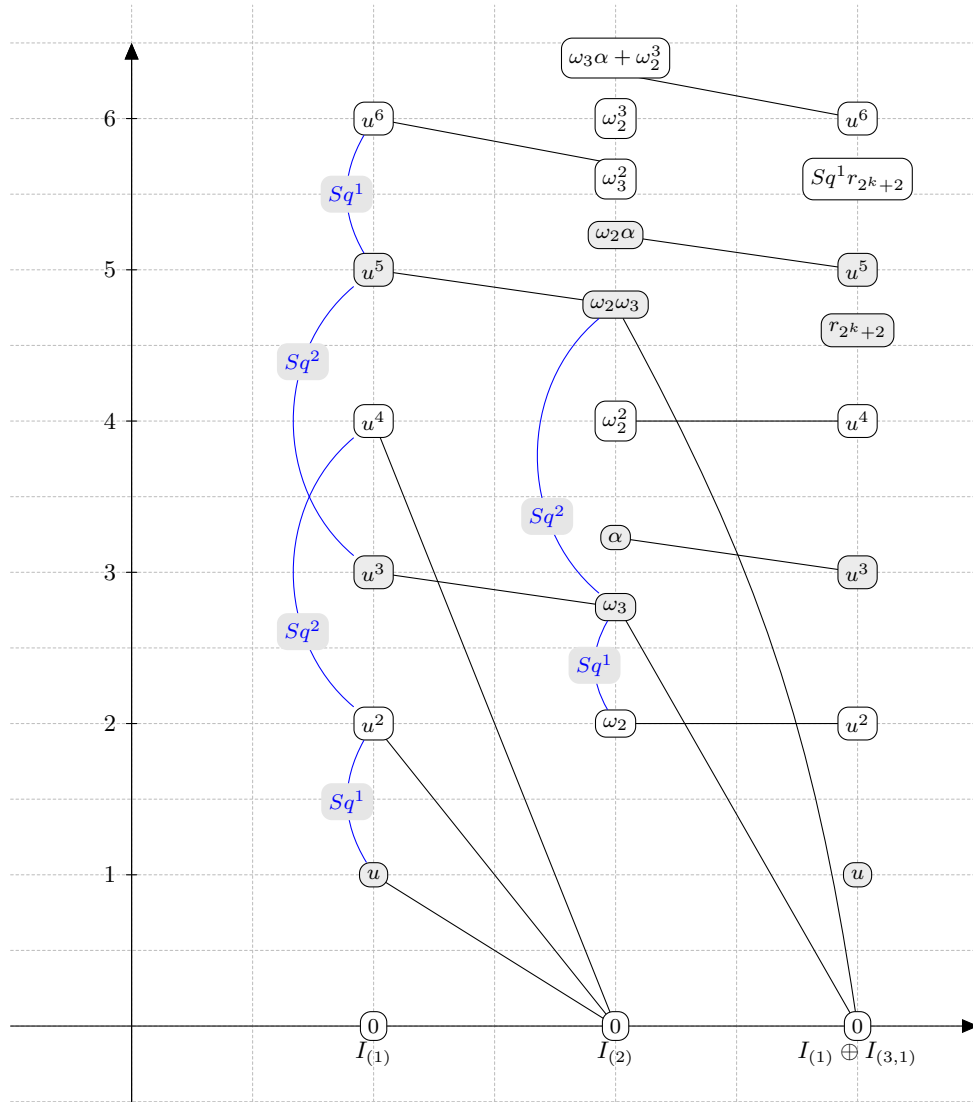
$$\begin{aligned} \partial_r^{2^k+1}(r_{2^k+1}) &= Sq^1 r_{2^k+2}, \\ \partial_r^{2^k}(r_{2^k}) &= Sq^1 r_{2^k+1}. \end{aligned}$$

Comme r_{2^k+3} est la seule classe non nul dans $I_{(4)}^4$ alors $Sq^1 r_{2^k+3} \neq 0$ et donc $r_{2^k+2} \neq 0$. Les deux seules éléments de degré 5 dans $I_{(1)} \oplus I_{(3,1)} \subset R^{2^k+2}$ ne sont pas annihilés par Sq^1 donc $Sq^1 r_{2^k+2} \neq 0$ d'où $r_{2^k+1} \neq 0$. Afin de calculer $Sq^1 r_{2^k+1}$, on doit avoir la description de $I_{(2)}$ dans les bas degrés. Celle-ci provient du fait que $\mathbb{F}_2 \oplus I_{(2)} \subset H^*B((\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^{\oplus 2}) \cong \mathbb{F}_2[u, v]$ est un module libre de rang 2 sur l'algèbre de Dickson $D(2) \cong \mathbb{F}_2[\omega_2, \omega_3] \subset \mathbb{F}_2[u, v]$, où $|\omega_2| = 2, |\omega_3| = 3$ tels que $\omega_2 = u^2 + uv + v^2$, $Sq^1 \omega_2 = \omega_3$ et $Sq^2 \omega_3 = \omega_2 \cdot \omega_3$. Ses deux générateurs sont 1 de degré 0 et

$\alpha = u^3 + u^2v + v^3$ de degré 3.

$$\begin{aligned} I_{(2)}^1 &= 0, & I_{(2)}^2 &= \langle \omega_2 \rangle, & I_{(2)}^3 &= \langle \omega_3, \alpha \rangle, \\ I_{(2)}^4 &= \langle \omega_2^2 \rangle, & I_{(2)}^5 &= \langle \omega_2 \omega_3, \omega_2 \alpha \rangle, & I_{(2)}^6 &= \langle \omega_3^2, \omega_2^3, \omega_3 \alpha \rangle. \end{aligned}$$

Puisque $H_{2^n-2^k}(R_\bullet) = H_k$, on peut déterminer le morphisme $I_{(1)} \rightarrow I_{(2)} \rightarrow I(1) \oplus I_{(3,1)}$ en bas degrés :



On en déduit que $r_{2^k+1} \in \langle \omega_2^3, \omega_3 \alpha \rangle$. Comme Sq^1 agit librement sur $\langle \omega_2^3, \omega_3 \alpha \rangle$ alors $Sq^1 r_{2^k+1} \neq 0$. Il s'ensuit que $r_{2^k} = u^7$. On a des suite exactes

$$0 \rightarrow H_k \rightarrow N^{2^k+1} \xrightarrow{\partial_n^{2^k+1}} N^{2^k+2} \xrightarrow{\partial_n^{2^k+2}} N^{2^k+3}$$

Si $l < k$ la surjection $H_k \rightarrow H_l, u \mapsto u$ entraîne le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & H_k & \longrightarrow & N^{2^k+1} & \xrightarrow{\partial_n^{2^k+1}} & N^{2^k+2} & \xrightarrow{\partial_n^{2^k+2}} & N^{2^k+3} \\ & & \downarrow & & \downarrow \gamma_{2^k+1} & & \downarrow \gamma_{2^k+2} & & \downarrow \gamma_{2^k+3} \\ 0 & \longrightarrow & H_l & \longrightarrow & N^{2^l+1} & \xrightarrow{\partial_n^{2^l+1}} & N^{2^l+2} & \xrightarrow{\partial_n^{2^l+2}} & N^{2^l+3} \end{array} \quad (4.4.5)$$

Le morphisme $\text{Ext}_{\mathcal{U}}^1(H_1, \text{Coker}(\partial_n^{2^k+1})) \rightarrow \text{Ext}_{\mathcal{U}}^1(H_1, \text{Coker}(\partial_n^{2^l+1}))$ est isomorphe d'après le lemme 4.4.3.1. Il s'ensuit qu'il existe le morphisme γ_{2^k+4} qui fait commuter le diagramme suivant

$$\begin{array}{ccccccc}
 \text{Coker}(\partial_n^{2^k+1}) & \hookrightarrow & N^{2^k+3} & \longrightarrow & N^{2^k+3}/\text{Ker}(\psi_{2^k+1}) & \hookrightarrow & N^{2^k+4} \\
 \downarrow & \searrow & \downarrow & \searrow & \downarrow & & \downarrow \exists \gamma_{2^k+4} \\
 & \text{Ker}(\psi_{2^k+1}) & \hookrightarrow & H_1 & & & \\
 & \downarrow & & \downarrow & & & \\
 \text{Coker}(\partial_n^{2^l+1}) & \hookrightarrow & N^{2^l+3} & \longrightarrow & N^{2^l+3}/\text{Ker}(\psi_{2^l+1}) & \hookrightarrow & N^{2^l+4} \\
 & \searrow & \downarrow & \searrow & \downarrow & & \\
 & \text{Ker}(\psi_{2^l+1}) & \hookrightarrow & H_1 & & &
 \end{array}$$

Le diagramme ci-dessous est donc commutatif.

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 0 & \longrightarrow & H_k & \longrightarrow & N^{2^k+1} & \xrightarrow{\partial_n^{2^k+1}} & N^{2^k+2} & \xrightarrow{\partial_n^{2^k+2}} & N^{2^k+3} & \xrightarrow{\partial_n^{2^k+3}} & N^{2^k+4} \\
 & & \downarrow & & \downarrow \gamma_{2^k+1} & & \downarrow \gamma_{2^k+2} & & \downarrow \gamma_{2^k+3} & & \downarrow \gamma_{2^k+4} \\
 0 & \longrightarrow & H_l & \longrightarrow & N^{2^l+1} & \xrightarrow{\partial_n^{2^l+1}} & N^{2^l+2} & \xrightarrow{\partial_n^{2^l+2}} & N^{2^l+3} & \xrightarrow{\partial_n^{2^l+3}} & N^{2^l+4}
 \end{array} \quad (4.4.6)$$

On montre d'abord qu'il existe $0 \neq n_{20} \in N^{20}$ tel que $u^4 + n_{20} \in \text{Im}(\partial^{19})$. Il résulte du diagramme 4.4.6 qu'il existe $0 \neq n_{2^k+4} \in N^{2^k+4}$ tel que $u^4 + n_{2^k+4} \in \text{Im}(\partial^{2^k+4})$.

On constate que $\partial^{16}(u^7) = Sq^1 r_{17} + x_0^6 x_1$ donc

$$\partial^{17}(Sq^1 r_{17}) = \partial_n^{17}(x_0^6 x_1) = x_0^7 = Sq^1(x_0^5 x_1).$$

Il s'ensuit que $\partial^{17}(r_{17}) = Sq^1 r_{18} + x_0^5 x_1$. De manière similaire, on a

$$\begin{aligned}
 \partial^{18}(r_{18}) &= Sq^1 r_{19} + x_0^4 x_1 \\
 \partial^{19}(r_{18}) &= u^4 + x_0^3 x_1.
 \end{aligned}$$

On en déduit que l'extension de $\ell^{20}(F(1))$ par $\text{Coker}(\partial_n^{19})$ est non trivial et donc l'extension de $\ell^{2^k+4}(F(1))$ par $\text{Coker}(\partial_n^{2^k+3})$ l'est aussi. \square

On donne ci-dessous les description de N^i pour $20 \leq i \leq 24$.

Proposition 4.4.3.3. *On a*

$$\begin{aligned}
 N^{20} &= J(5), \quad \partial_n^{20} = \bullet Sq^1 \\
 N^{21} &= J(4), \quad \partial_n^{21} = \bullet Sq^1 \\
 N^{22} &= J(3), \quad \partial_n^{22} = \bullet Sq^1 \\
 N^{23} &= J(2), \quad \partial_n^{23} = 0 \\
 N^{24} &= 0.
 \end{aligned}$$

Démonstration. Il résulte du corollaire 4.3.3.5 que N^{20} est l'enveloppe injective de $\text{Ker}(\psi_{18})$.

Puisque

$$\text{Ker}(\psi_{18}) \cong \text{Coker} \left(\ell^{18}(F(1)) \hookrightarrow \text{Coker} \left(J(7) \oplus J(6) \xrightarrow{\begin{pmatrix} \bullet Sq^1 & 0 \\ \bullet (Sq^2 Sq^1) & \bullet Sq^2 \end{pmatrix}} J(6) \oplus J(4) \right) \right)$$

donc $\text{Ker}(\psi_{18}) \cong \Sigma^5 \mathbb{F}_2$ alors on a bien $N^{20} \cong J(5)$.

Le morphisme $\partial_n^{19} : N^{19} \rightarrow N^{20}$ est $(\bullet Sq^1, 0)^t$ donc $\text{Coker}(\partial_n^{19}) \cong \Sigma^4 \mathbb{F}_2$. Comme $\text{Ker}(\psi_{19})$ est une extension non-triviale dans $\text{Ext}_{\mathcal{U}}^1(\ell^{20}(F(1)), \text{Coker}(\partial_n^{19})) \cong \text{Ext}_{\mathcal{U}}^1(H_2, \Sigma^4 \mathbb{F}_2) \cong \mathbb{F}_2$ on obtient $\text{Ker}(\psi_{19}) \cong H_3$. En tant que l'enveloppe injective de $\text{Ker}(\psi_{19})$, le module N^{21} est isomorphe à $J(4)$.

De manière similaire on obtient $N^{22} = J(3)$, $N^{23} = J(2)$ et $N^{24} = 0$. □

Quelques calculs dans la catégorie \mathcal{U}

A.1 Sur la conjecture 4.3.3.1

On montre dans ce paragraphe le résultat suivant, ce qui soutient la conjecture 4.3.3.1 :

Théorème A.1.0.4. *Soit d un entier pair, on a :*

$$\mathbb{F}_2 \subset \mathrm{Ext}_{\mathcal{U}}^d(\Phi^r F(1), \Phi^r F(1)) \text{ si } r \geq v(d).$$

De plus si $r \geq v(d)$ le morphisme

$$\mathrm{Ext}_{\mathcal{U}}^d(\Phi^r F(1), \Phi^r F(1)) \rightarrow \mathrm{Ext}_{\mathcal{F}}^d(I, I)$$

est non-trivial.

Lemme A.1.0.5. *Soient $k \geq 0$ et $n \geq 1$ deux entiers. Il y a des isomorphismes naturels :*

$$\mathrm{Ext}_{\mathcal{U}}^{2^n}(\Phi^{n+k} F(1), \Phi^{n+k+1} F(1)) \xrightarrow{(\lambda_{\Phi^{n+k} F(1)})_*} \mathrm{Ext}_{\mathcal{U}}^{2^n}(\Phi^{n+k} F(1), \Phi^{n+k} F(1)).$$

Démonstration. La suite exacte courte

$$0 \rightarrow \Phi^{n+k+1} F(1) \rightarrow \Phi^{n+k} F(1) \rightarrow \Sigma^{2^{n+k}} \mathbb{F}_2 \rightarrow 0$$

induit la suite exacte :

$$\begin{array}{ccc} 0 = \mathrm{Ext}_{\mathcal{U}}^{2^n-1}(\Phi^{n+k} F(1), \Sigma^{2^{n+k}} \mathbb{F}_2) & & \\ \downarrow & & \\ \mathrm{Ext}_{\mathcal{U}}^{2^n}(\Phi^{n+k} F(1), \Phi^{n+k+1} F(1)) & \xrightarrow{\sim} & \mathrm{Ext}_{\mathcal{U}}^{2^n}(\Phi^{n+k} F(1), \Phi^{n+k} F(1)) \\ & & \downarrow \\ & & \mathrm{Ext}_{\mathcal{U}}^{2^n}(\Phi^{n+k} F(1), \Sigma^{2^{n+k}} \mathbb{F}_2) = 0 \end{array}$$

Le lemme en découle. \square

Démonstration du théorème A.1.0.4. Le cas de $d = 2^n$ a été calculé à l'aide du lemme 4.3.3.13. En effet $\text{Ext}_{\mathcal{U}}^{2^n}(\Phi^r F(1), \Phi^r F(1)) \cong \mathbb{F}_2$ pour tout r tel que $r \geq n$. On raisonne par récurrence sur la longueur 2-adique de d . On suppose que le théorème est vérifié pour d dont $\alpha(d) < k$. On passe au cas de $\alpha(d) = k$. On note $d = 2^{n_1} + 2^{n_2} + \dots + 2^{n_k}$ où $1 \leq n_1 < n_2 < \dots < n_k$. On désigne par d_1 la somme $2^{n_2} + \dots + 2^{n_k}$. Pour $r \geq v(d)$ le diagramme suivant est donc commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \text{Ext}_{\mathcal{U}}^{d_1}(\Phi^r F(1), F(1)) & \xrightarrow{\sim \delta_{n_1}} & \text{Ext}_{\mathcal{U}}^d(\Phi^{r-1} F(1), F(1)) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \text{Ext}_{\mathcal{F}}^{d_1}(I, I) & \xrightarrow{\sim e_{n_1}} & \text{Ext}_{\mathcal{F}}^d(I, I) \end{array}$$

δ_{n_1} désignant le générateur du groupe $\text{Ext}_{\mathcal{U}}^{2^{n_1}}(\Phi^{r-1} F(1), \Phi^r F(1))$. Par hypothèse de récurrence, le composé

$$\text{Ext}_{\mathcal{U}}^{d_1}(\Phi^r F(1), F(1)) \rightarrow \text{Ext}_{\mathcal{F}}^{d_1}(I, I) \xrightarrow{\sim e_{n_1}} \text{Ext}_{\mathcal{F}}^d(I, I)$$

est non-trivial. On en déduit que $\mathbb{F}_2 \subset \text{Ext}_{\mathcal{U}}^d(\Phi^{r-1} F(1), F(1))$ et que le morphisme

$$\text{Ext}_{\mathcal{U}}^d(\Phi^r F(1), F(1)) \rightarrow \text{Ext}_{\mathcal{F}}^{d_1}(I, I)$$

est non-trivial. \square

A.2 La vérification des lemmes techniques

Démonstration du lemme 4.3.3.1. Soit M un tel module et x un élément arbitraire dans M . Compte tenu du fait que M est nilpotent, il existe un entier n tel que $Sq_0^n x = 0$. Par ailleurs, M est réduit donc x doit être trivial. Il en résulte que $M = 0$. \square

Démonstration du lemme 4.3.3.2. Soit I un module instable injectif qui contient M . On constate que I est une somme directe $I_r \oplus I_n$ où $I_r \cong \bigoplus_{\alpha} L_{\alpha}$ et $I_n \cong \bigoplus_{\beta} L_{\beta} \otimes J(n_{\beta})$, L_{α}, L_{β} désignant les modules injectifs réduits indécomposables.

Puisqu'il n'y a aucun morphisme d'un module nilpotent vers un module réduit, le module N est inclus dans I_n . On obtient un diagramme dont les lignes sont exactes.

$$\begin{array}{ccccccc} & & 0 & & 0 & & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & N & \longrightarrow & M & \longrightarrow & R \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow i & & \downarrow \omega & & \downarrow \alpha \\ 0 & \longrightarrow & I_n & \longrightarrow & I & \longrightarrow & I_r \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ & & 0 & & 0 & & 0 \end{array}$$

On en déduit la suite exacte

$$0 \rightarrow \text{Ker}(\alpha) \rightarrow \text{Coker}(i) \rightarrow \text{Coker}(\omega) \rightarrow \text{Coker}(\alpha) \rightarrow 0.$$

Comme $\text{Coker}(i)$ est nilpotent et $\text{Ker}(\alpha) \subset R$ est réduit, on a $\text{Ker}(\alpha) = 0$. En prenant pour I l'enveloppe injective de M , il résulte que I est la somme directe de l'enveloppe de R et celle de N . \square

Démonstration du lemme 4.3.3.3. Le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 \dots & \xrightarrow{\partial_n^{k-2}} & N^{k-1} & \xrightarrow{\partial_n^{k-1}} & N^k & \xrightarrow{\partial_n^k} & N^{k+1} \rightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 \dots & \xrightarrow{\partial^{k-2}} & I^{k-1} & \xrightarrow{\partial^{k-1}} & I^k & \xrightarrow{\partial^k} & I^{k+1} \rightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 \dots & \xrightarrow{\partial_r^{k-2}} & R^{k-1} & \xrightarrow{\partial_r^{k-1}} & R^k & \xrightarrow{\partial_r^k} & R^{k+1} \rightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & 0 & & 0 & & 0
 \end{array}$$

entraîne la suite exacte

$$0 = H^k(I^\bullet, \partial^\bullet) \rightarrow H^k(R^\bullet, \partial_r^\bullet) \rightarrow \text{Coker}(\partial_n^k) \rightarrow \text{Coker}(\partial^k) \rightarrow \text{Coker}(\partial_r^k) \rightarrow 0$$

D'après le corollaire 4.3.1.3, on a $H^k(R^\bullet, \partial_r^\bullet) \cong \ell^k(F(1))$. Le morphisme φ_{2k+1} est défini comme la flèche

$$\text{Ker}(\partial_r^{2k+2}) / \text{Im}(\partial_r^{2k+1}) \hookrightarrow R^{2k+2} / \text{Im}(\partial_r^{2k+1}).$$

Le module

$$\text{Coker}(\varphi_{2k+1}) \cong R^{2k+2} / \text{Ker}(\partial_r^{2k+2}),$$

est un sous module de R^{2k+3} , et est donc réduit.

Dans la mesure où le composé

$$\text{Coker}(\partial_n^{2k+1}) \rightarrow \text{Coker}(\partial^{2k+1}) \xrightarrow{\psi_{2k+1}} \text{Coker}(\varphi_{2k+1})$$

est nul, on a l'inclusion $\alpha : \text{Coker}(\partial_n^{2k+1}) \hookrightarrow \text{Ker}(\psi_{2k+1})$. Par ailleurs, le composé

$$\text{Ker}(\psi_{2k+1}) \rightarrow \text{Coker}(\partial^{2k+1}) \rightarrow \text{Coker}(\partial_r^{2k+1}) \rightarrow \text{Coker}(\varphi_{2k+1})$$

est aussi trivial donc on obtient un morphisme $\text{Ker}(\psi_{2k+1}) \xrightarrow{\beta} \ell^{2k+2}(F(1))$ qui rend commutatif

Le module $J(1)$ est lui-même injectif donc $N^3 = J(1)$.

(d) Comme $\ell^2(F(1)) \cong J(1)$, alors $\text{Ker}(\psi_2) = 0$. Il en résulte que $N^4 = 0$.

(e) Puisque $\text{Ker}(\psi_3) = \ell^4(F(1)) \cong J(2)$, on a $N^5 = J(2)$.

2. Afin de démontrer le lemme, on utilise un raisonnement de récurrence triple. On initialise le lemme sur n , ensuite sur k et éventuellement sur m . Les calculs précédents justifient les premiers cas de n . Supposons que le lemme est vrai pour $n > \alpha$. On montre qu'il est encore vrai pour $n = \alpha$. On raisonne de nouveau par récurrence sur k .

(a) Pour $k = \alpha - 1$, on a $2^\alpha - 2^{\alpha-1} = 2^{\alpha-1}$. Pour démontrer ce premier cas de k , on raisonne par récurrence sur m .

i. Par l'hypothèse de récurrence sur n , on a $N^{2^{\alpha-1}-1} = J(1)$. Bien plus, $N^{2^{\alpha-1}-2} = 0$ donc $\text{Coker}(\partial_n^{2^{\alpha-1}-2}) = J(1)$. Puisque $\ell^{2^{\alpha-1}-2}(F(1)) = J(1)$, alors le module $\text{Ker}(\psi_{2^{\alpha-1}-2})$ est trivial. En tant que son enveloppe injective, $N^{2^{\alpha-1}}$ est aussi trivial. Le module $N^{2^{\alpha-1}+1}$ est l'enveloppe injective de $\text{Ker}(\psi_{2^{\alpha-1}-1})$. Ce dernier est isomorphe à $H_{\alpha-1}$ alors on a $N^{2^{\alpha-1}+1} \cong J(2^{\alpha-2})$. Comme le module $\text{Ker}(\psi_{2^{\alpha-1}})$ s'insère dans la suite exacte courte

$$0 \rightarrow H_{\alpha-1} \rightarrow J(2^{\alpha-2}) \rightarrow \text{Ker}(\psi_{2^{\alpha-1}}) \rightarrow 0$$

on a $d(\text{Ker}(\psi_{2^{\alpha-1}})) = 2^{\alpha-2} - 1$ et $(\text{Ker}(\psi_{2^{\alpha-1}}))^{2^{\alpha-2}-1} = \mathbb{F}_2$. Pour cette raison, on obtient

$$N^{2^{\alpha-1}+2} = J(2^{\alpha-1} - 1) \oplus \left(\bigoplus_{m_\beta < 2^{\alpha-1}-1} J(m_\beta) \right).$$

Il en découle que

$$d\left(\text{Coker}\left(\partial_n^{2^{\alpha-1}+1}\right)\right) = 2^{\alpha-2} - 2 \text{ et } \left(\text{Coker}\left(\partial_n^{2^{\alpha-1}+1}\right)\right)^{2^{\alpha-2}-2} = \mathbb{F}_2.$$

ii. On suppose que :

$$\begin{aligned} d\left(N^{2^\alpha-2^{\alpha-1}+m}\right) &= 2^{\alpha-2} - m + 1, \\ \left(N^{2^\alpha-2^{\alpha-1}+m}\right)^{2^{\alpha-2}-m+1} &= \mathbb{F}_2, \\ d\left(\text{Coker}\left(\partial_n^{2^{\alpha-1}+m-1}\right)\right) &= 2^{\alpha-2} - m, \\ \left(\text{Coker}\left(\partial_n^{2^{\alpha-1}+m-1}\right)\right)^{2^{\alpha-2}-m} &= \mathbb{F}_2. \end{aligned}$$

pour $2 \leq m < t \leq 2^{\alpha-2}$. On passe à t .

Le module $\text{Ker}(\psi_{2^{\alpha-1}+t-2})$ est déterminé par la suite exacte

$$\ell^{2^{\alpha-1}+t-2}(F(1)) \hookrightarrow \text{Coker}\left(\partial_n^{2^{\alpha-1}+t-2}\right) \rightarrow \text{Ker}(\psi_{2^{\alpha-1}+t-2}) \twoheadrightarrow \ell^{2^{\alpha-1}+t-1}(F(1)).$$

Par l'hypothèse de récurrence sur m , on a

$$\begin{aligned} d\left(\text{Coker}\left(\partial_n^{2^{\alpha-1}+t-2}\right)\right) &= 2^{\alpha-2} - t + 1, \\ \left(\text{Coker}\left(\partial_n^{2^{\alpha-1}+t-2}\right)\right)^{2^{\alpha-2}-t+1} &= \mathbb{F}_2. \end{aligned}$$

Il en résulte que

$$d(\text{Ker}(\psi_{2^{\alpha-1}+t-2})) = 2^{\alpha-2} - t + 1 \text{ et } (\text{Ker}(\psi_{2^{\alpha-1}+t-2}))^{2^{\alpha-2}-t+1} = \mathbb{F}_2.$$

Il s'ensuit que

$$N^{2^{\alpha-1}+t} = J(2^{\alpha-1} - t + 1) \oplus \left(\bigoplus_{m_\beta < 2^{\alpha-1}-t+1} J(m_\beta) \right)$$

et donc

$$d\left(\text{Coker}\left(\partial_n^{2^{\alpha-1}+t-1}\right)\right) = 2^{\alpha-2} - t, \text{ et } \left(\text{Coker}\left(\partial_n^{2^{\alpha-1}+t-1}\right)\right)^{2^{\alpha-2}-t} = \mathbb{F}_2.$$

Cela conclut la récurrence sur m et donc vérifie le cas $k = \alpha - 1$.

- (b) Supposons qu'on a montré le lemme pour $k > \alpha - i \geq 1$, on passe à $k = \alpha - i$. On constate que $2^\alpha - 2^{\alpha-i+1} + 2^{\alpha-i} - 1 = 2^\alpha - 2^{\alpha-i} - 1$. Par l'hypothèse de récurrence sur k , on a

$$d\left(N^{2^\alpha-2^{\alpha-i}-1}\right) = 2 \text{ et } \left(N^{2^\alpha-2^{\alpha-i}-1}\right)^2 = \mathbb{F}_2.$$

Il s'ensuit que $N^{2^\alpha-2^{\alpha-i}-1} = J(2) \oplus \left(\bigoplus_{\gamma} J(1) \right)$. Puisque $\text{Ext}_{\mathcal{U}}^{2^\alpha-2^{\alpha-i}-1}(\Sigma\mathbb{F}_2, F(1)) = 0$, le module $N^{2^\alpha-2^{\alpha-i}-1}$ contient aucune copie de $J(1)$. Or $N^{2^\alpha-2^{\alpha-i}-1} = J(2)$ et il en découle que

$$\text{Coker}\left(\partial_n^{2^\alpha-2^{\alpha-i}-2}\right) = \Sigma\mathbb{F}_2.$$

Comme $\ell^{2^\alpha-2^{\alpha-i}-2}(F(1)) = \Sigma\mathbb{F}_2$, alors on a $\text{Ker}(\psi_{2^\alpha-2^{\alpha-i}-2}) = 0$. Il en découle que $N^{2^\alpha-2^{\alpha-i}} = 0$. Par ailleurs, on a

$$\text{Coker}\left(\partial_n^{2^\alpha-2^{\alpha-i}-1}\right) \cong H_{2^\alpha-2^{\alpha-i}}(N^\bullet, \partial_n^\bullet) = 0.$$

Il s'ensuit que

$$\text{Ker}(\psi_{2^\alpha-2^{\alpha-i}-1}) \cong \ell^{2^\alpha-2^{\alpha-i}}(F(1)) \cong H_{\alpha-i}.$$

Or $N^{2^\alpha-2^{\alpha-i}+1} = J(2^{\alpha-i}-1)$ d'où

$$d\left(N^{2^\alpha-2^{\alpha-i}+1}\right) = 2^{\alpha-i}-1 \text{ et } \left(N^{2^\alpha-2^{\alpha-i}+1}\right)^{2^{\alpha-i}-1} = \mathbb{F}_2.$$

De manière analogue que celle du cas $k = \alpha - 1$ on a

$$d\left(N^{2^\alpha-2^{\alpha-i}+m}\right) = 2^{\alpha-i}-1 - m + 1 \text{ et } \left(N^{2^\alpha-2^{\alpha-i}+m}\right)^{2^{\alpha-i}-m+1} = \mathbb{F}_2,$$

pour $2 \leq m \leq 2^{\alpha-i-1}$. Cela conclut la récurrence sur k .

Le lemme en résulte. \square

Démonstration du lemme 4.4.3.1. La suite exacte courte

$$0 \rightarrow N^{2^k+1} \nearrow_{H_k} \rightarrow N^{2^k+2} \rightarrow \text{Coker} \left(\partial_n^{2^k+1} \right) \rightarrow 0$$

induit l'isomorphisme

$$\text{Ext}_{\mathcal{U}}^1 \left(H_1, \text{Coker} \left(\partial_n^{2^k+1} \right) \right) \rightarrow \text{Ext}_{\mathcal{U}}^2 \left(H_1, N^{2^k+1} \nearrow_{H_k} \right).$$

On constate que

$$\text{Ext}_{\mathcal{U}}^2 \left(H_1, N^{2^k+1} \nearrow_{H_k} \right) \cong \text{Ext}_{\mathcal{U}}^3 (H_1, H_k) \cong \mathbb{F}_2$$

dans la mesure où N^{2^k+1} est injectif. On remarque ainsi que si $l < k$, la surjection $H_k \rightarrow H_l, u \mapsto u$ entraîne le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & H_k & \longrightarrow & N^{2^k+1} & \xrightarrow{\partial_n^{2^k+1}} & N^{2^k+2} & \xrightarrow{\partial_n^{2^k+2}} & N^{2^k+3} \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & H_l & \longrightarrow & N^{2^l+1} & \xrightarrow{\partial_n^{2^l+1}} & N^{2^l+2} & \xrightarrow{\partial_n^{2^l+2}} & N^{2^l+3} \end{array}$$

puisque la première ligne du diagramme fournit les termes de la résolution injective minimale de H_k et la deuxième ligne fournit ceux de la résolution injective minimale de H_l . On obtient donc le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc} \text{Ext}_{\mathcal{U}}^1 \left(H_1, \text{Coker} \left(\partial_n^{2^k+1} \right) \right) & \xrightarrow{\sim} & \text{Ext}_{\mathcal{U}}^2 \left(H_1, N^{2^k+1} \nearrow_{H_k} \right) & \xrightarrow{\sim} & \text{Ext}_{\mathcal{U}}^3 (H_1, H_k) \\ \downarrow & & \downarrow \sim & & \parallel \\ \text{Ext}_{\mathcal{U}}^1 \left(H_1, \text{Coker} \left(\partial_n^{2^l+1} \right) \right) & \xrightarrow{\sim} & \text{Ext}_{\mathcal{U}}^2 \left(H_1, N^{2^l+1} \nearrow_{H_l} \right) & \xrightarrow{\sim} & \text{Ext}_{\mathcal{U}}^3 (H_1, H_l) \end{array}$$

Il en résulte que le morphisme

$$\text{Ext}_{\mathcal{U}}^1 \left(H_1, \text{Coker} \left(\partial_n^{2^k+1} \right) \right) \rightarrow \text{Ext}_{\mathcal{U}}^1 \left(H_1, \text{Coker} \left(\partial_n^{2^l+1} \right) \right)$$

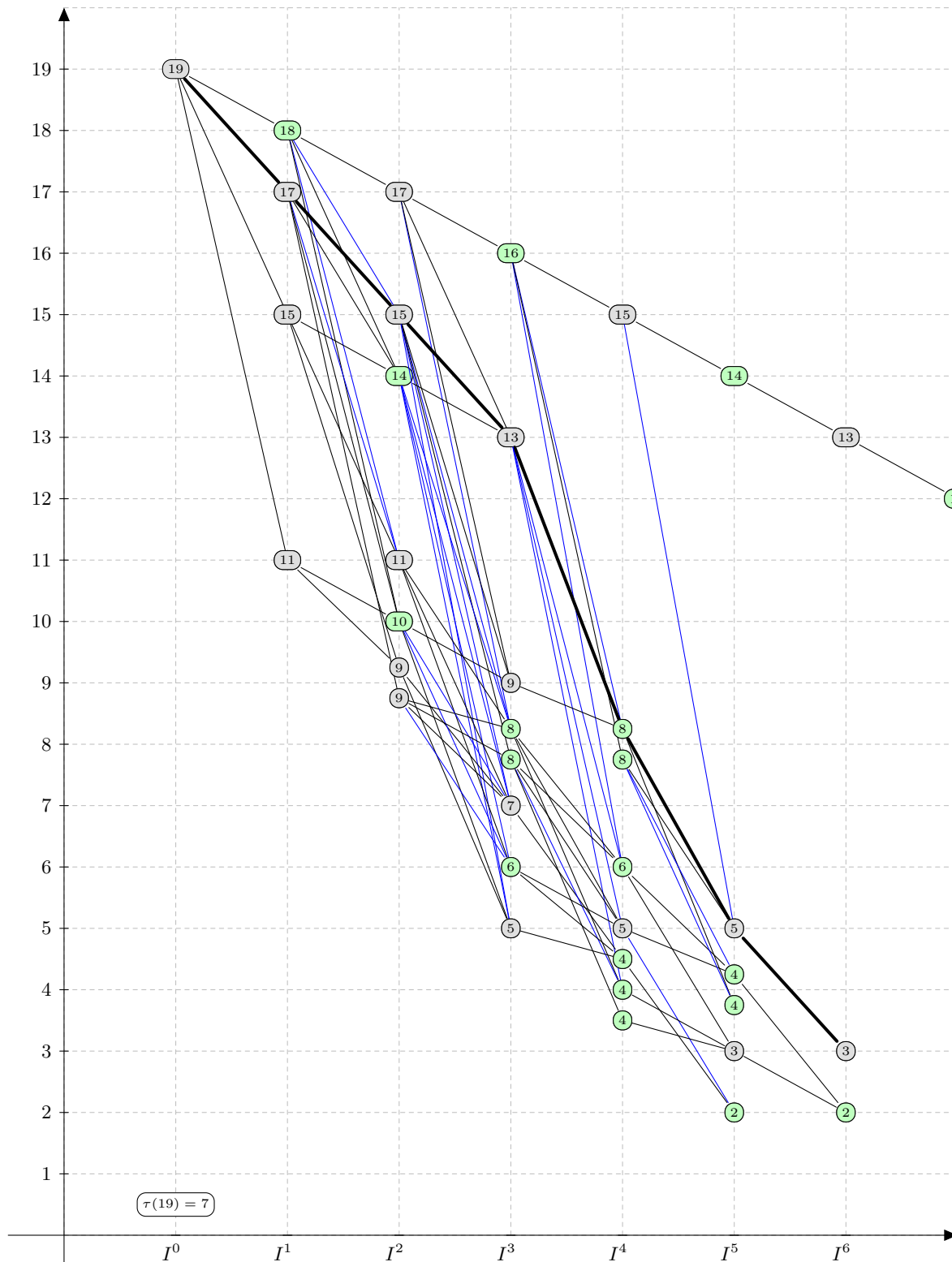
est un isomorphisme. \square

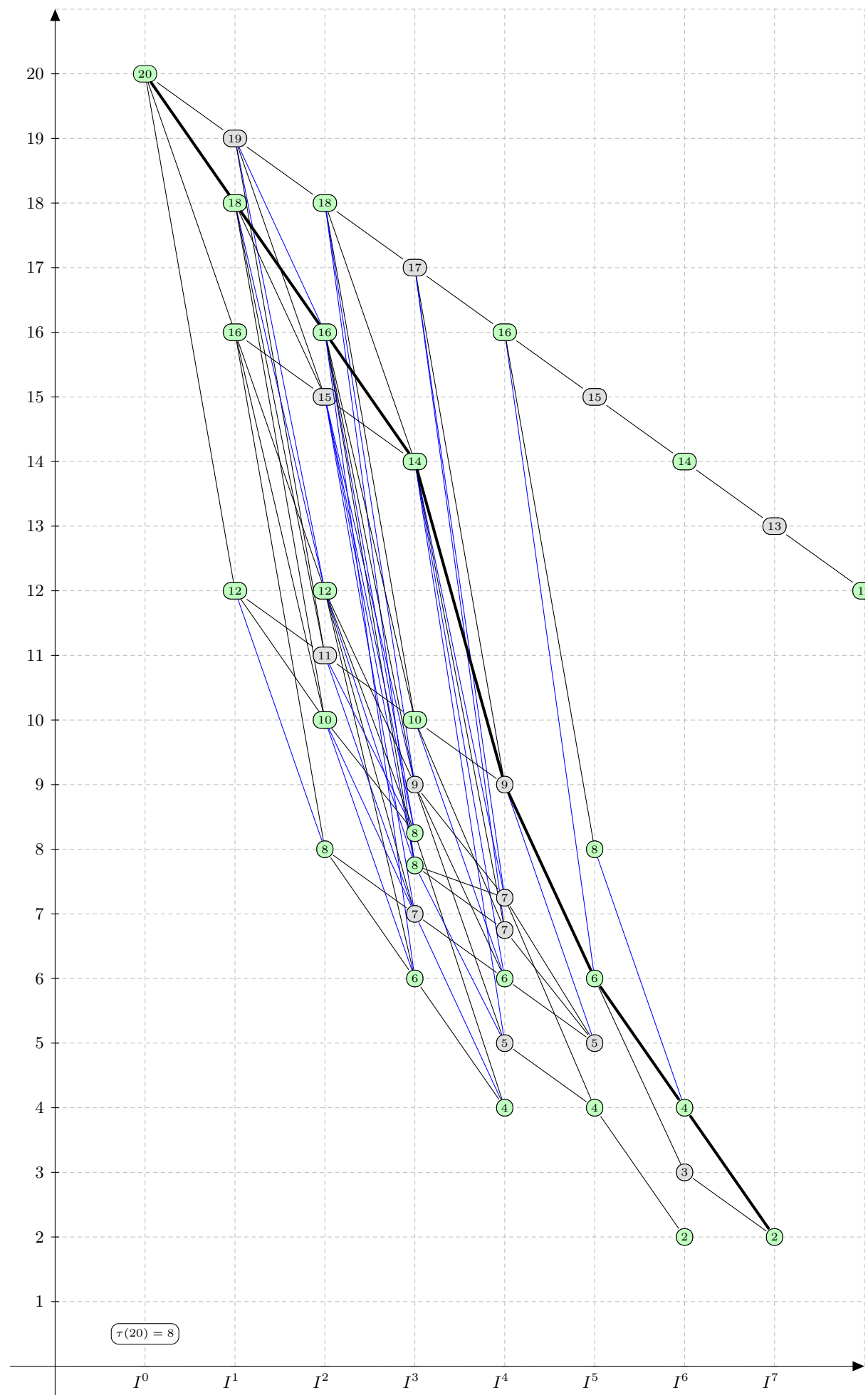
A.3 L'estimation de la fonction τ

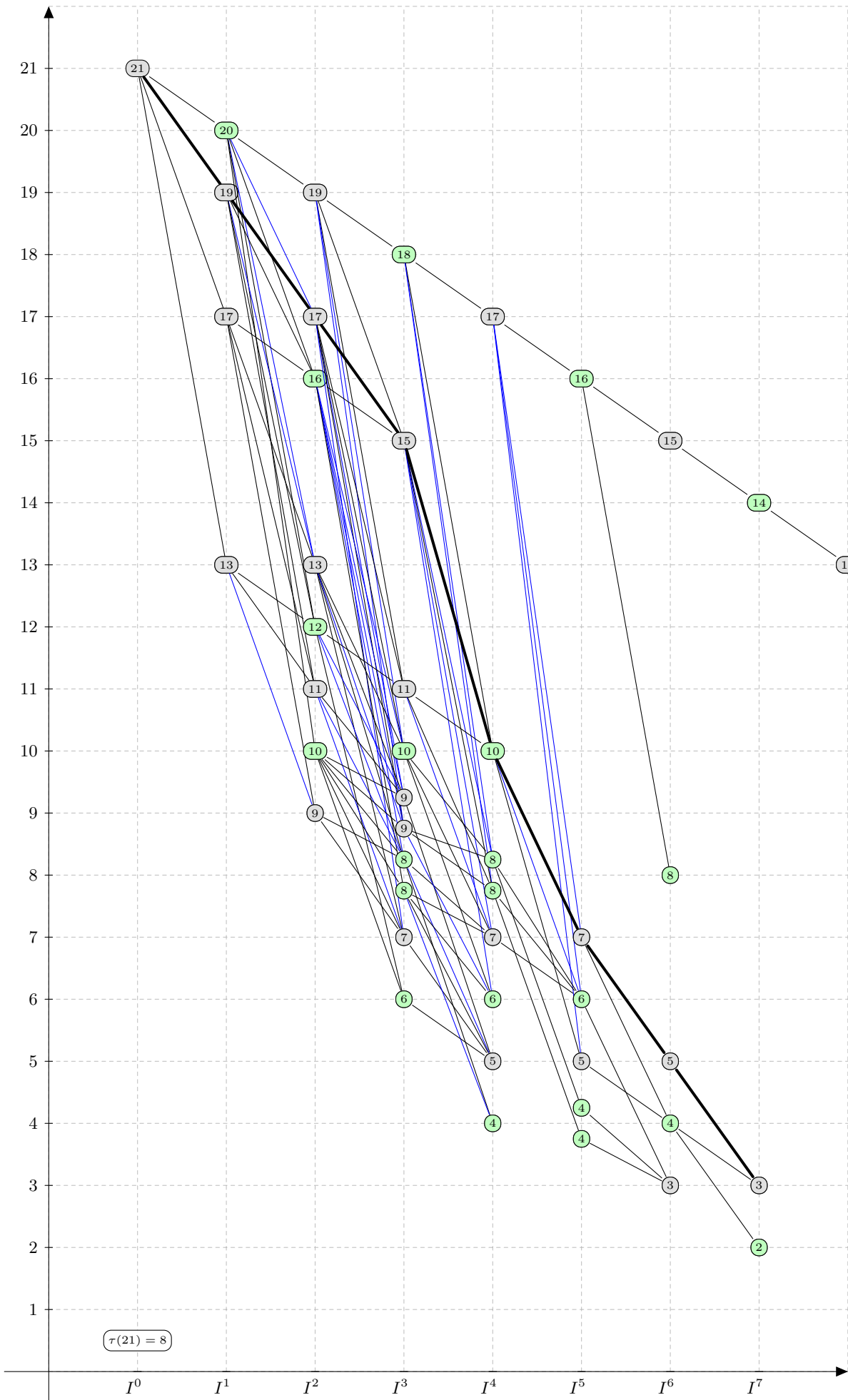
Le théorème 3.2.2.2 et le lemme 3.2.2.5 seront prouvés en même temps. On donne d'abord les calculs de la fonction $\tau(k)$ pour $19 \leq k \leq 30$, ce qui est nécessaire pour avoir une première idée sur la zone $\left(I^{\tau(k)-i}, 1 \leq i \leq 7 \right)$ de la résolution injective minimale de $\Sigma^k \mathbb{F}_2$. On montre ensuite que si k est suffisamment grand, cette zone est périodique. Il résultera des calculs explicites sur la périodicité de cette zone qu'on obtient celle de la fonction τ .

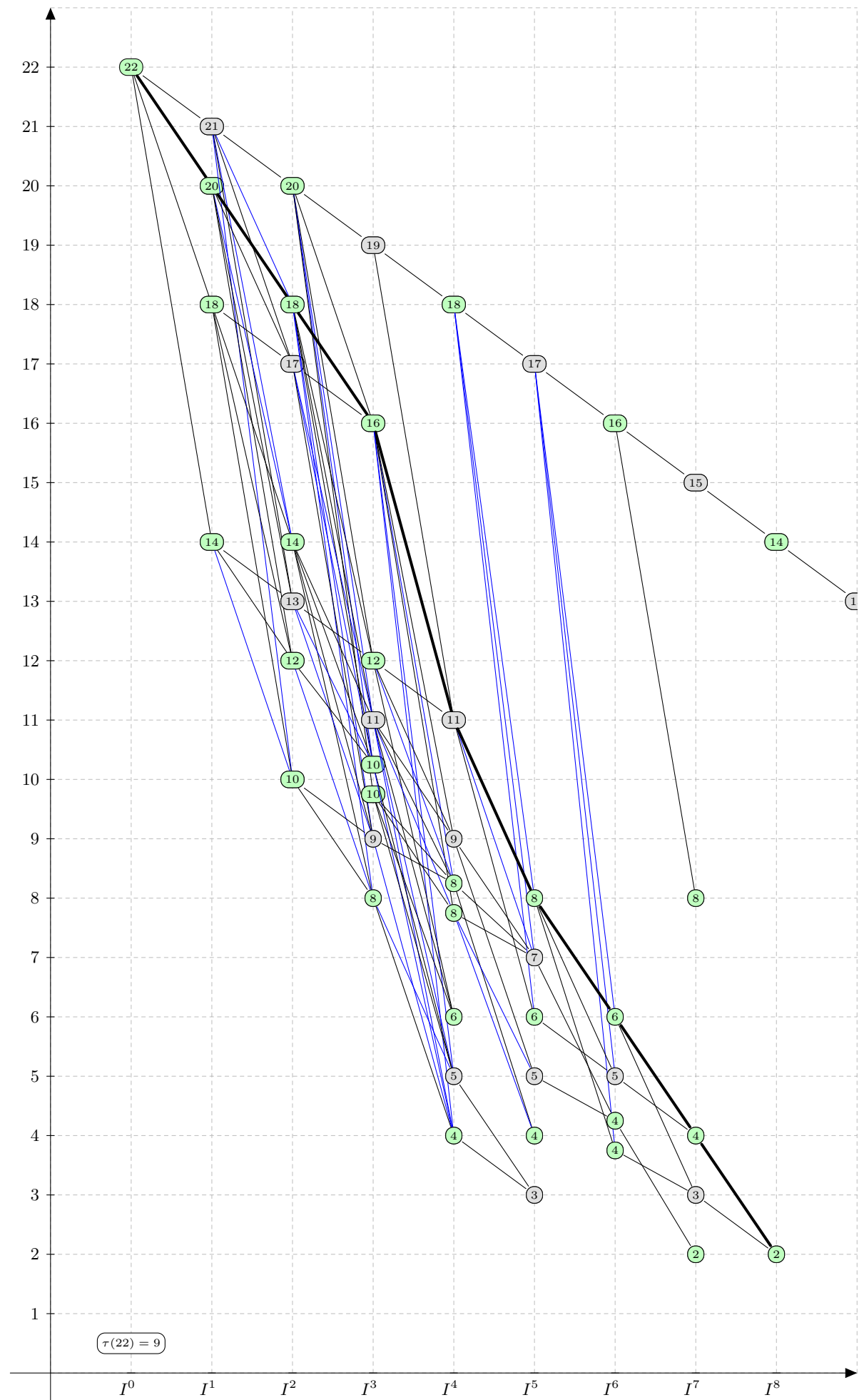
A.3.1 Quelques valeurs de la fonction τ

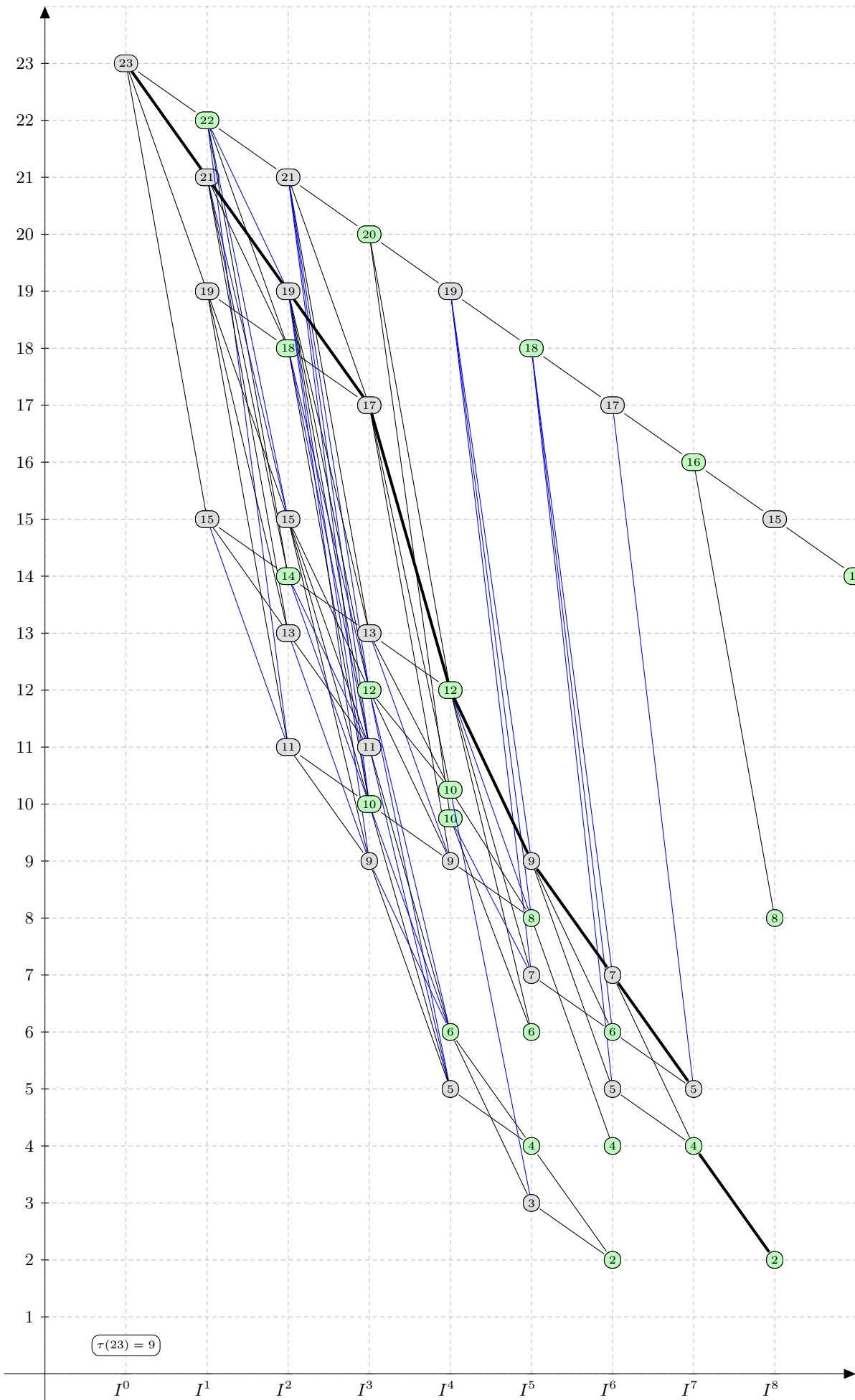
Les valeurs $\tau(k)$ pour confortour $19 \leq k \leq 30$ sont fournis dans ce paragraphe. Les différentielles dans les diagrammes ci-dessous sont obtenues à l'aide de l'algorithme BG à partir de celles du diagramme de $\Sigma^{18}\mathbb{F}_2$ introduit dans le paragraphe 3.2.2 donc seront omises. Cependant, pour le confort du lecteur on attribut aux différentielles deux couleurs noir et bleu : la noire représente un morphisme de la forme $\bullet Sq^n$ et la bleue représente un morphisme de la forme $\bullet (\sum_I Sq^I)$.

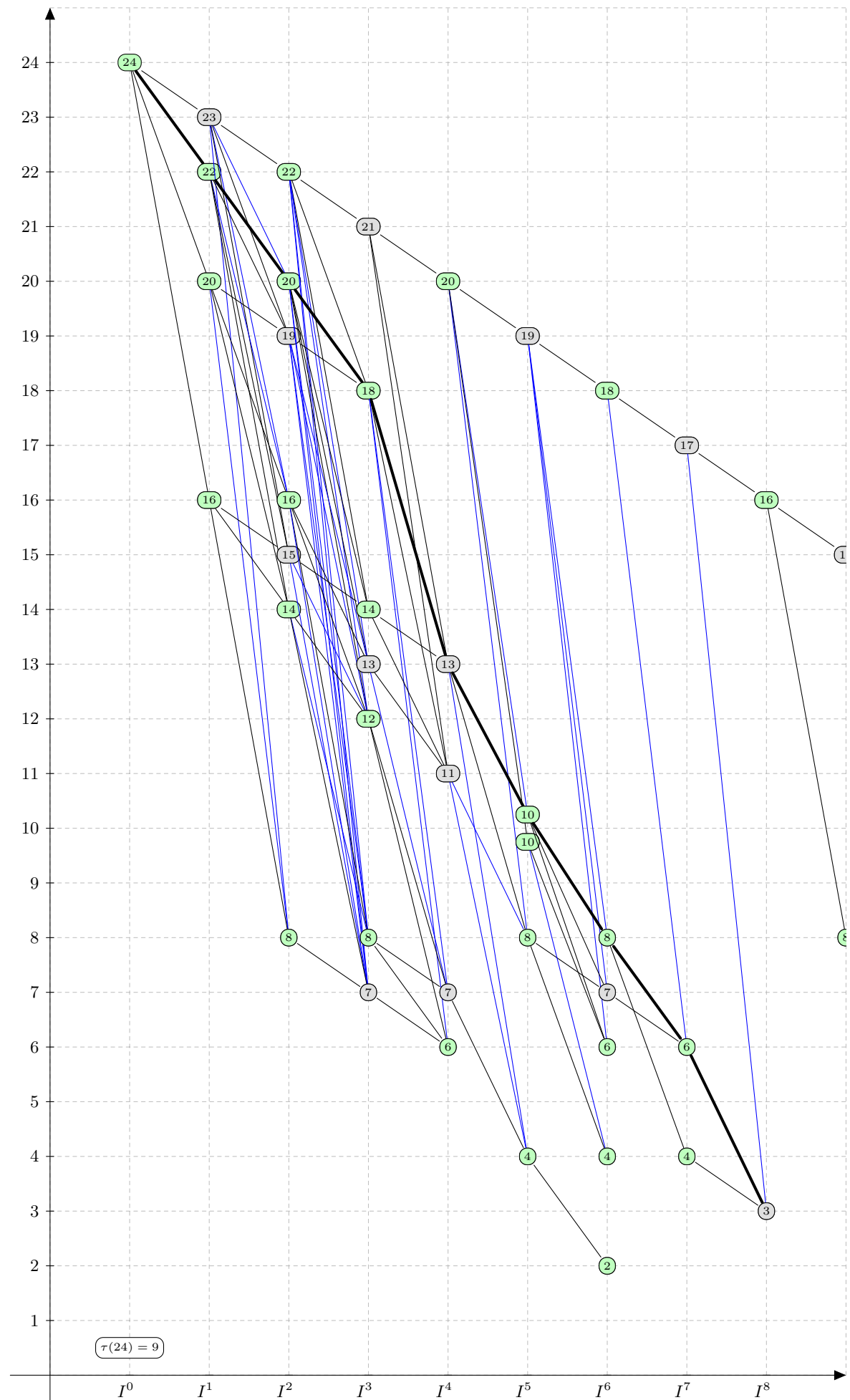


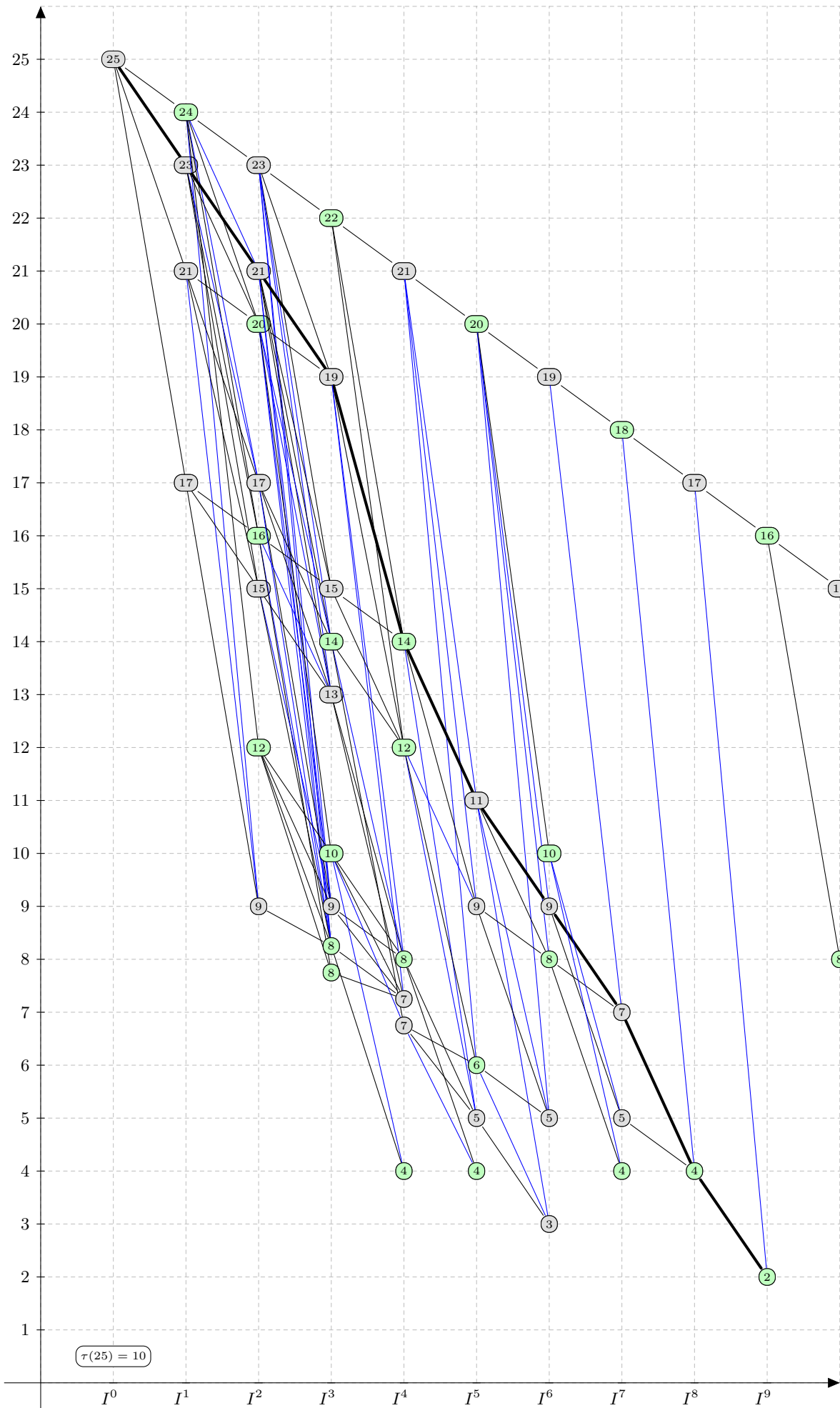




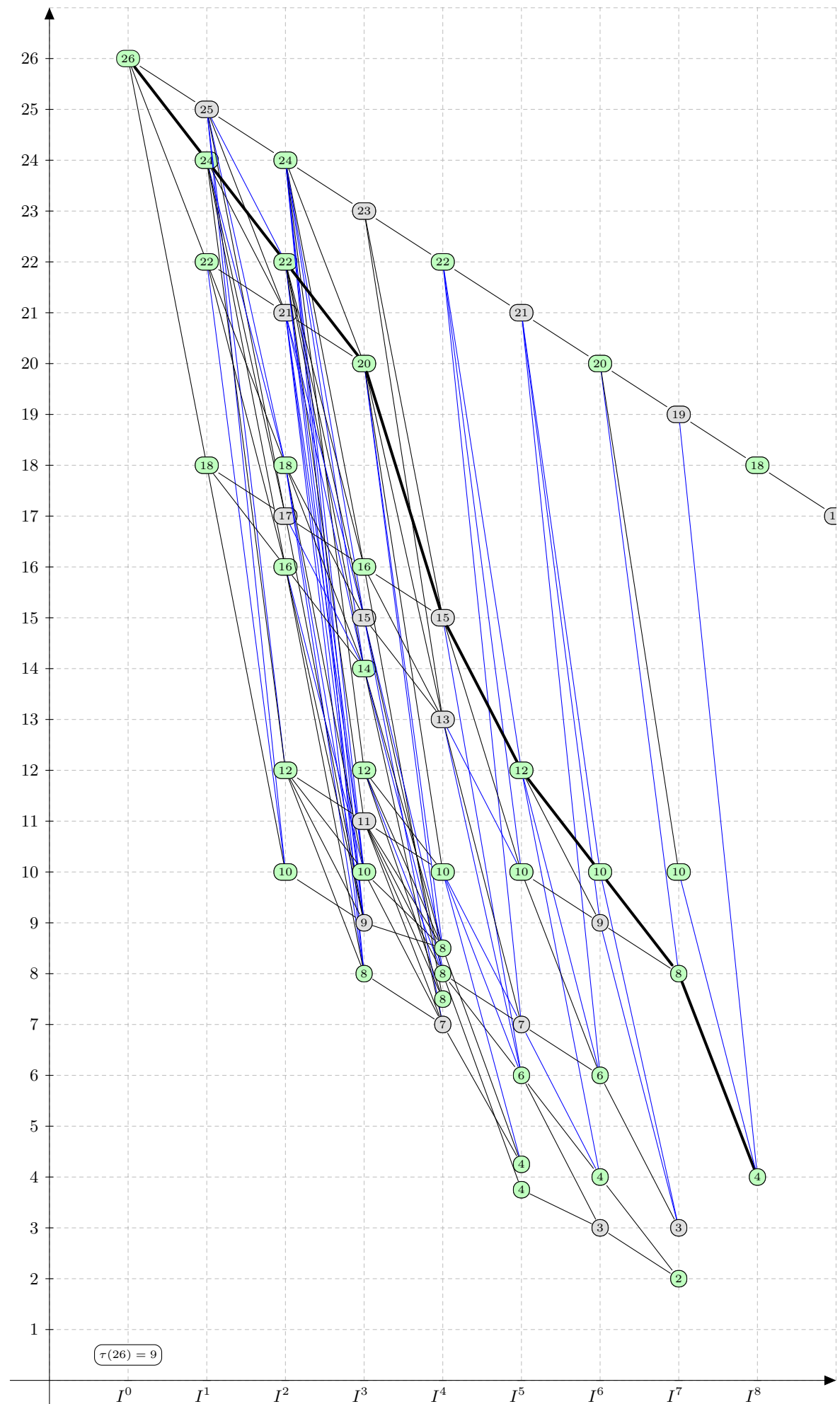


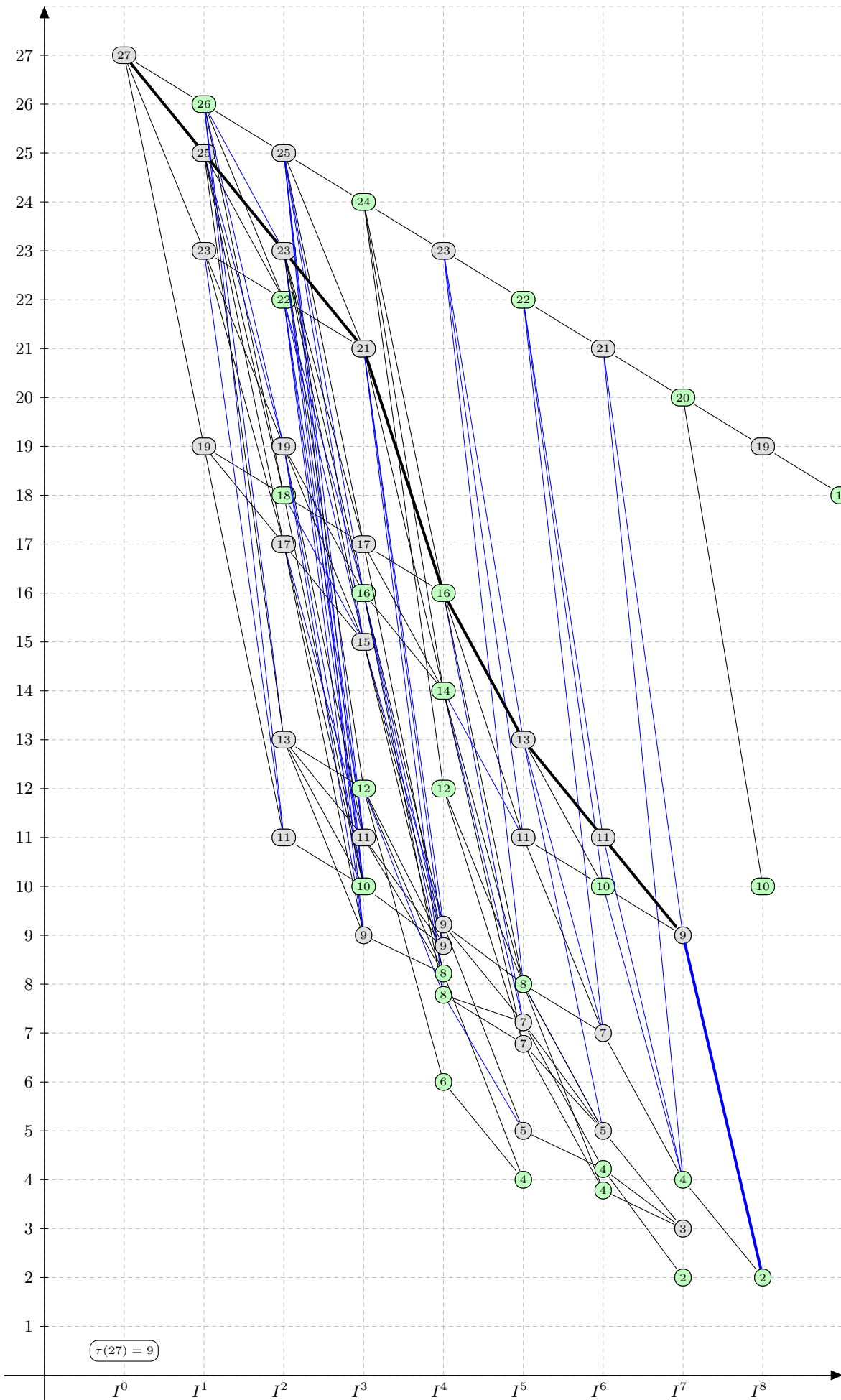




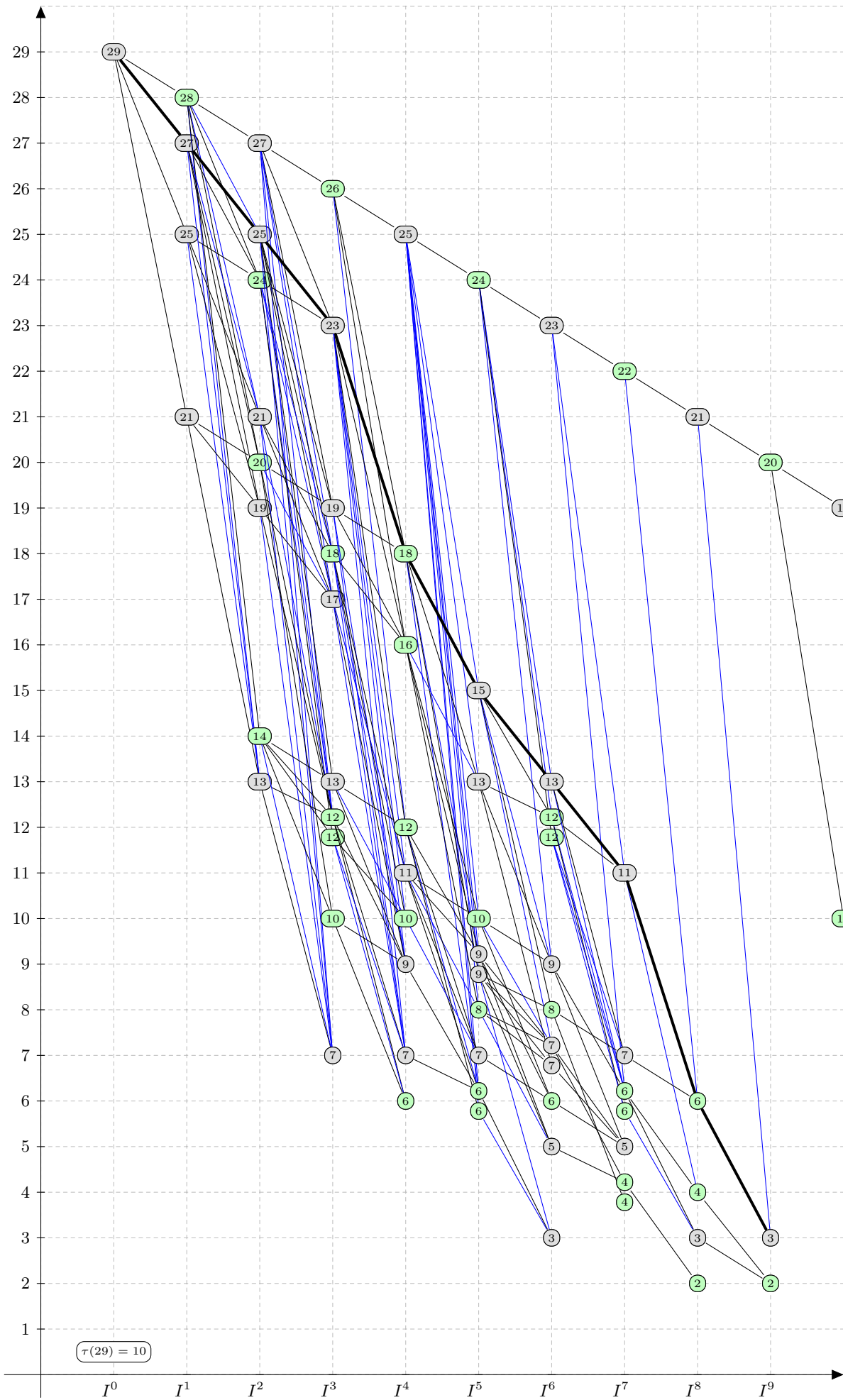


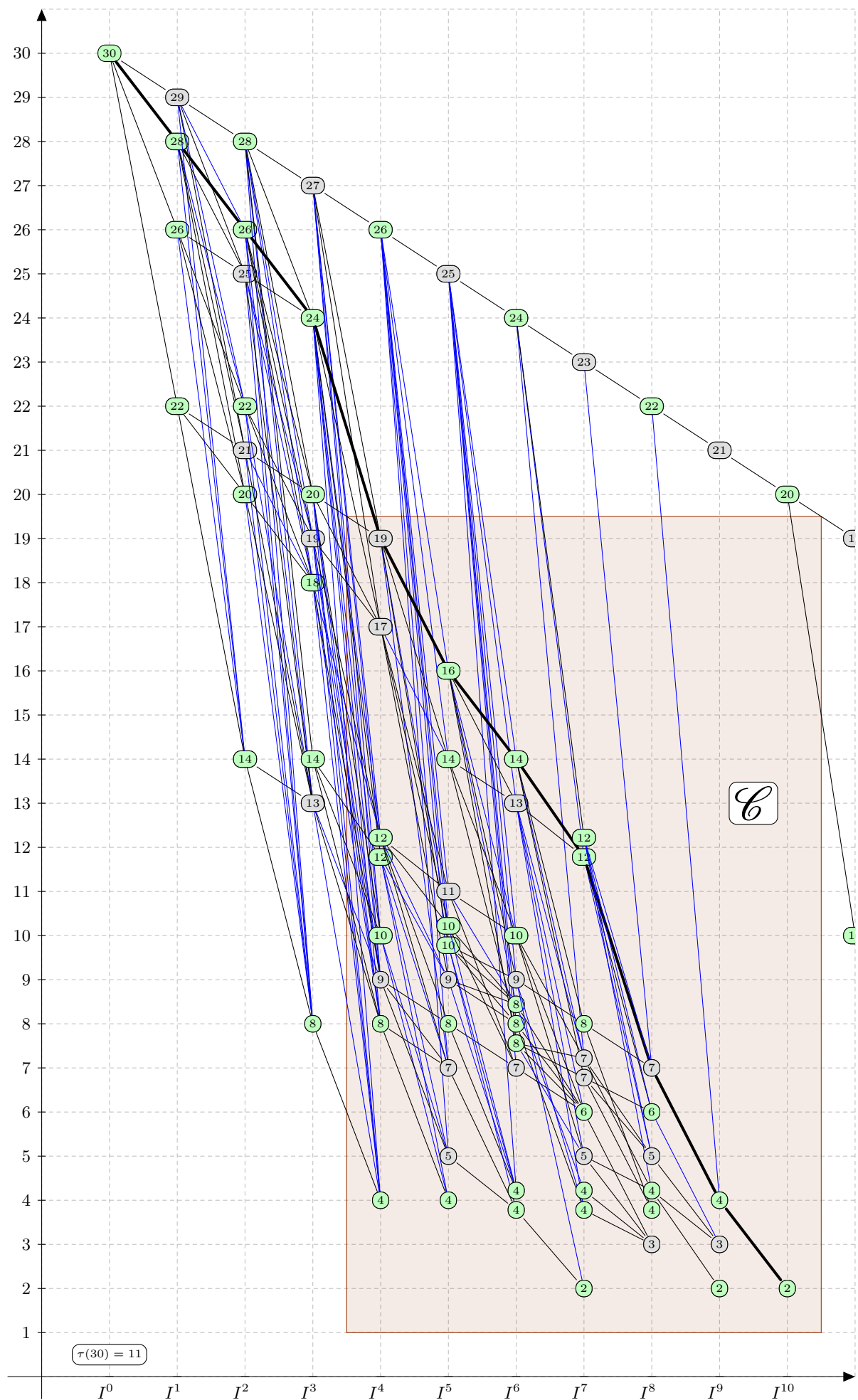
$\tau(25) = 10$





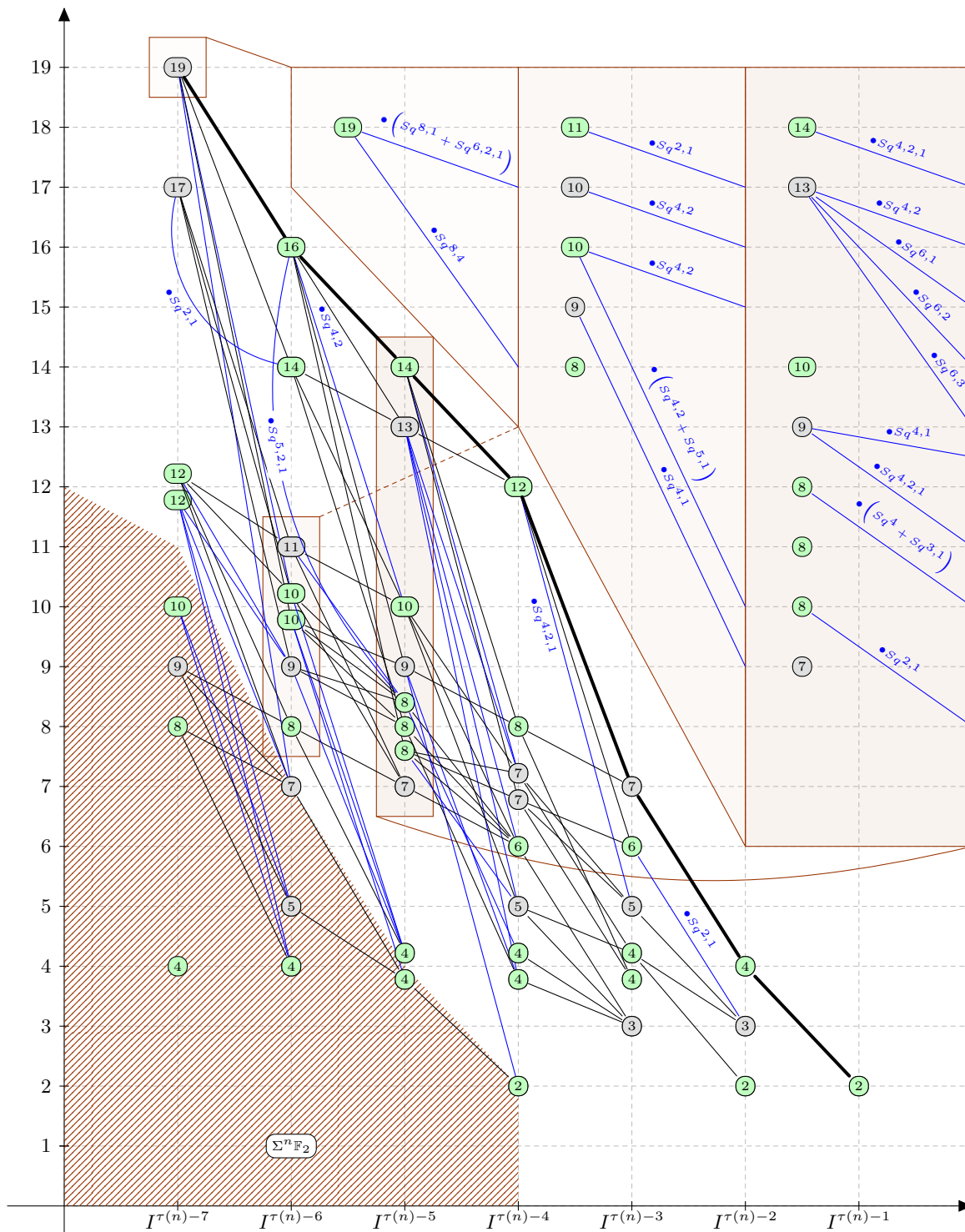






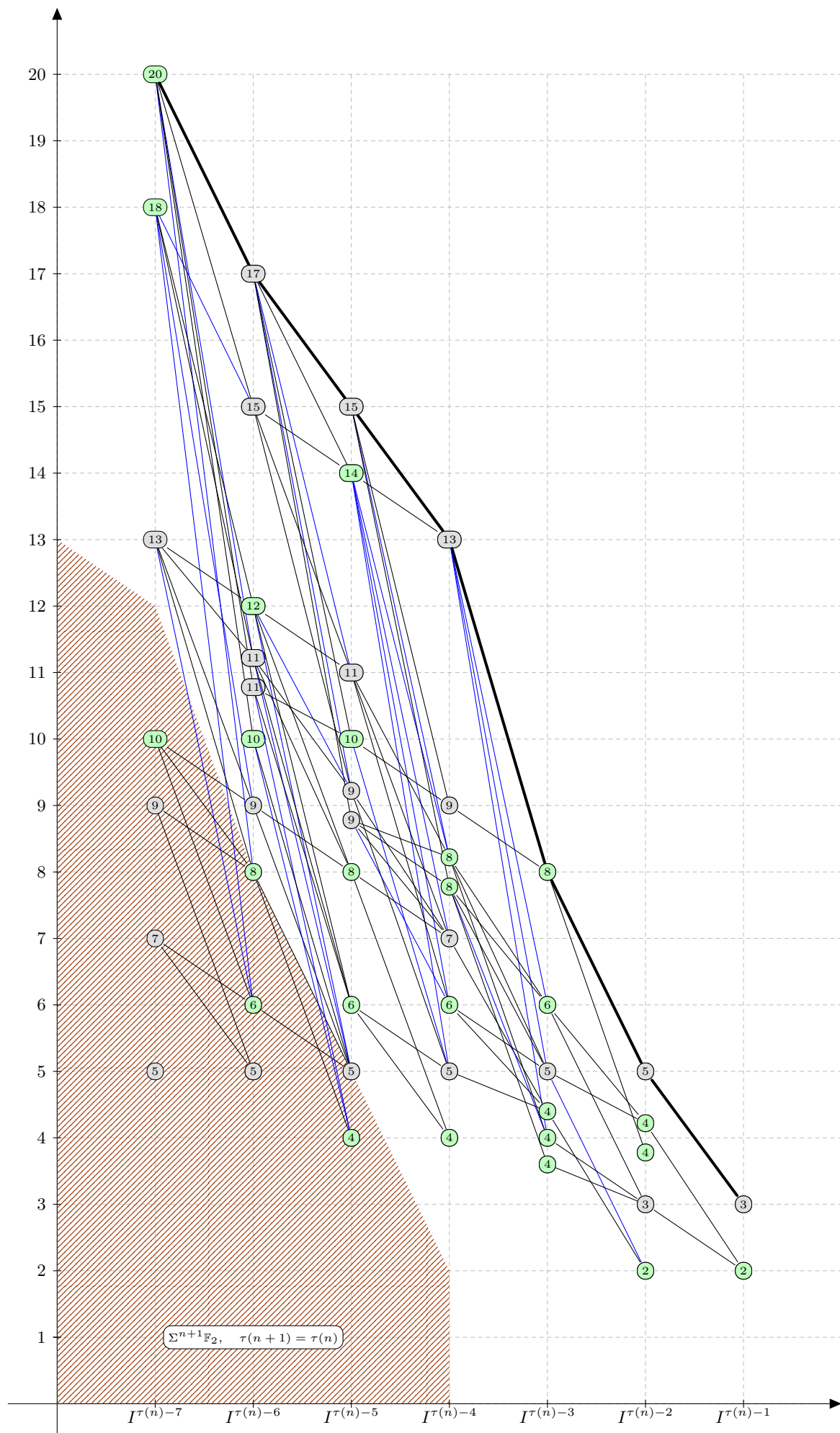
A.3.2 Démonstration du théorème 3.2.2.2

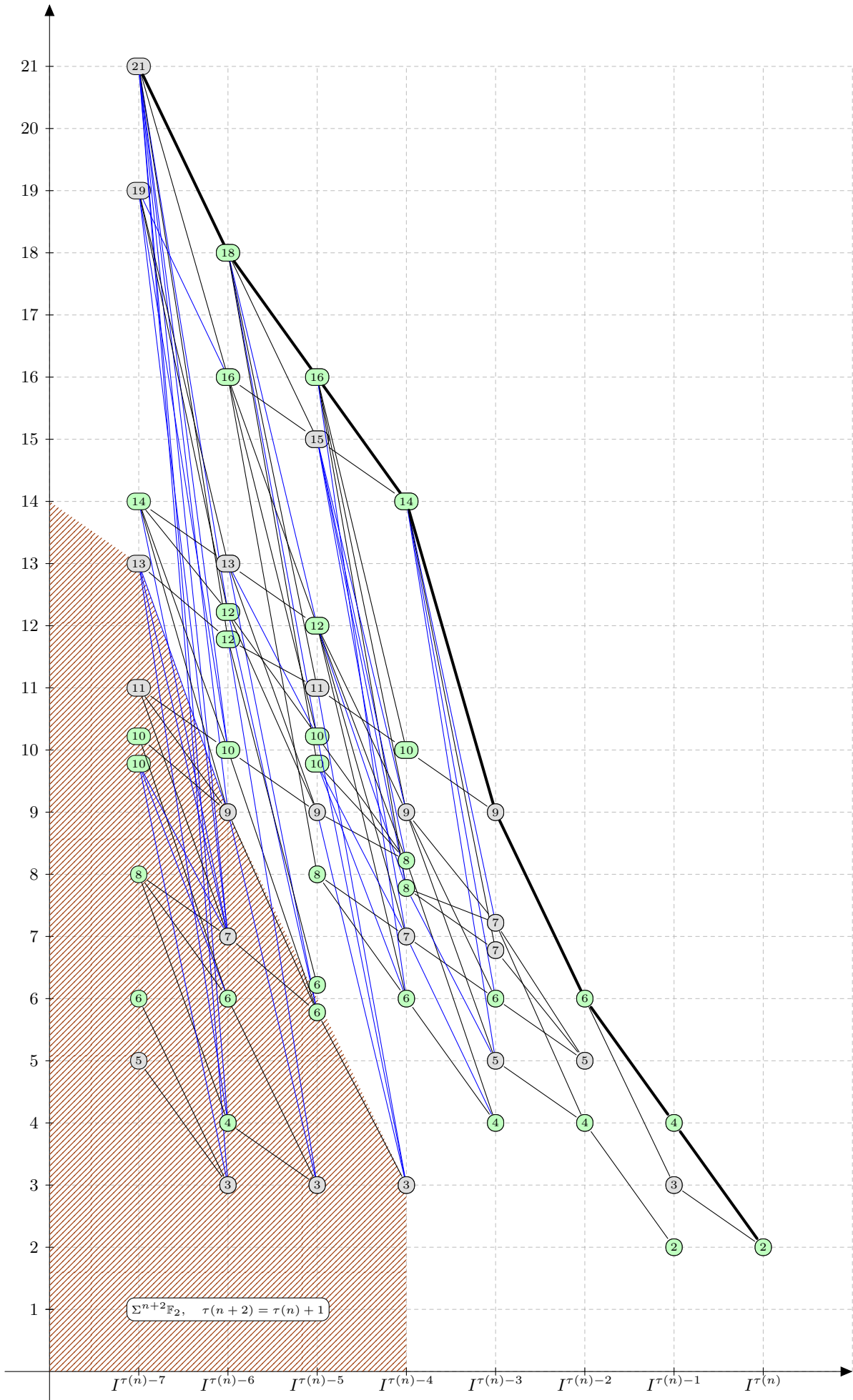
Soit $n \geq 30$ en entier de la forme $12k + 6$. Les calculs dans le paragraphe précédent et en particulier celui de la résolution injective minimale de $\Sigma^{30}\mathbb{F}_2$ permettent de supposer que la zone $(I^{\tau(12k+6)-i}, 1 \leq i \leq 7)$ de la résolution injective minimale de $\Sigma^{12k+6}\mathbb{F}_2$ a la forme suivante³ :

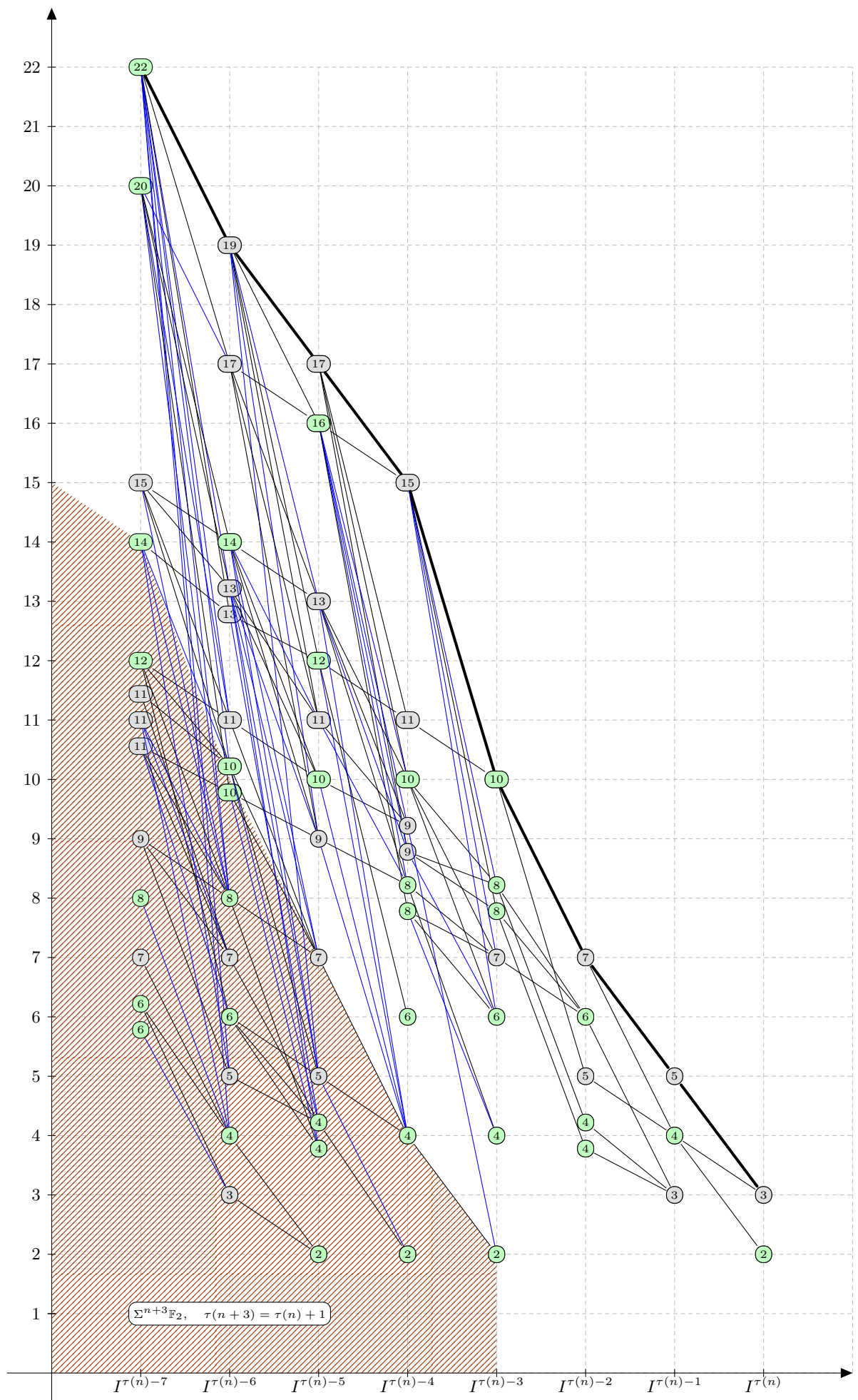


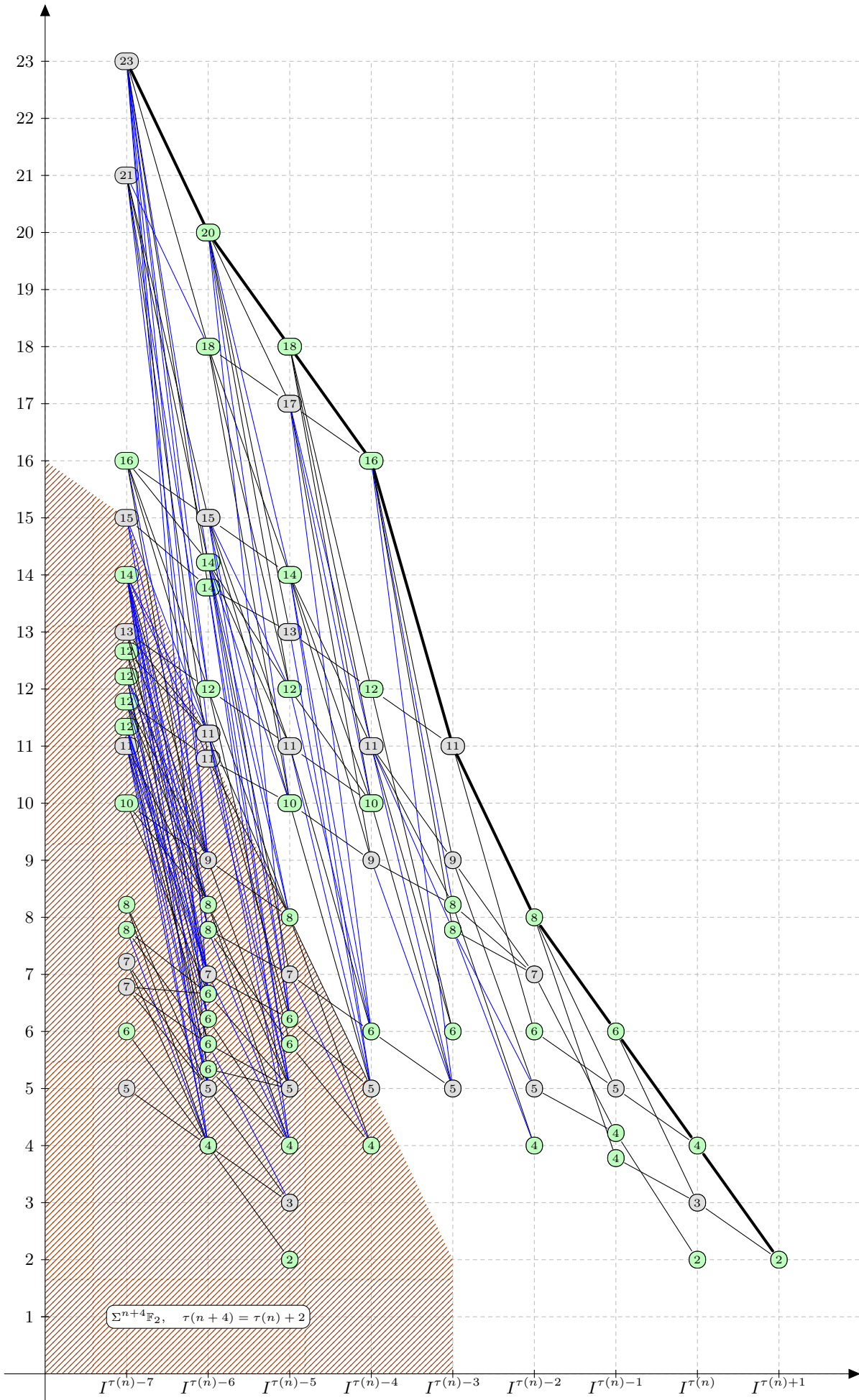
Dans ce diagramme, on a omis la zone conçue par la suite à la Bockstein car celle-là est saturée par l'algorithme de BG. On donne dans la suite cette zone des résolutions injectives minimales de $\Sigma^m \mathbb{F}_2$ pour $n + 1 \geq m \geq n + 12$.

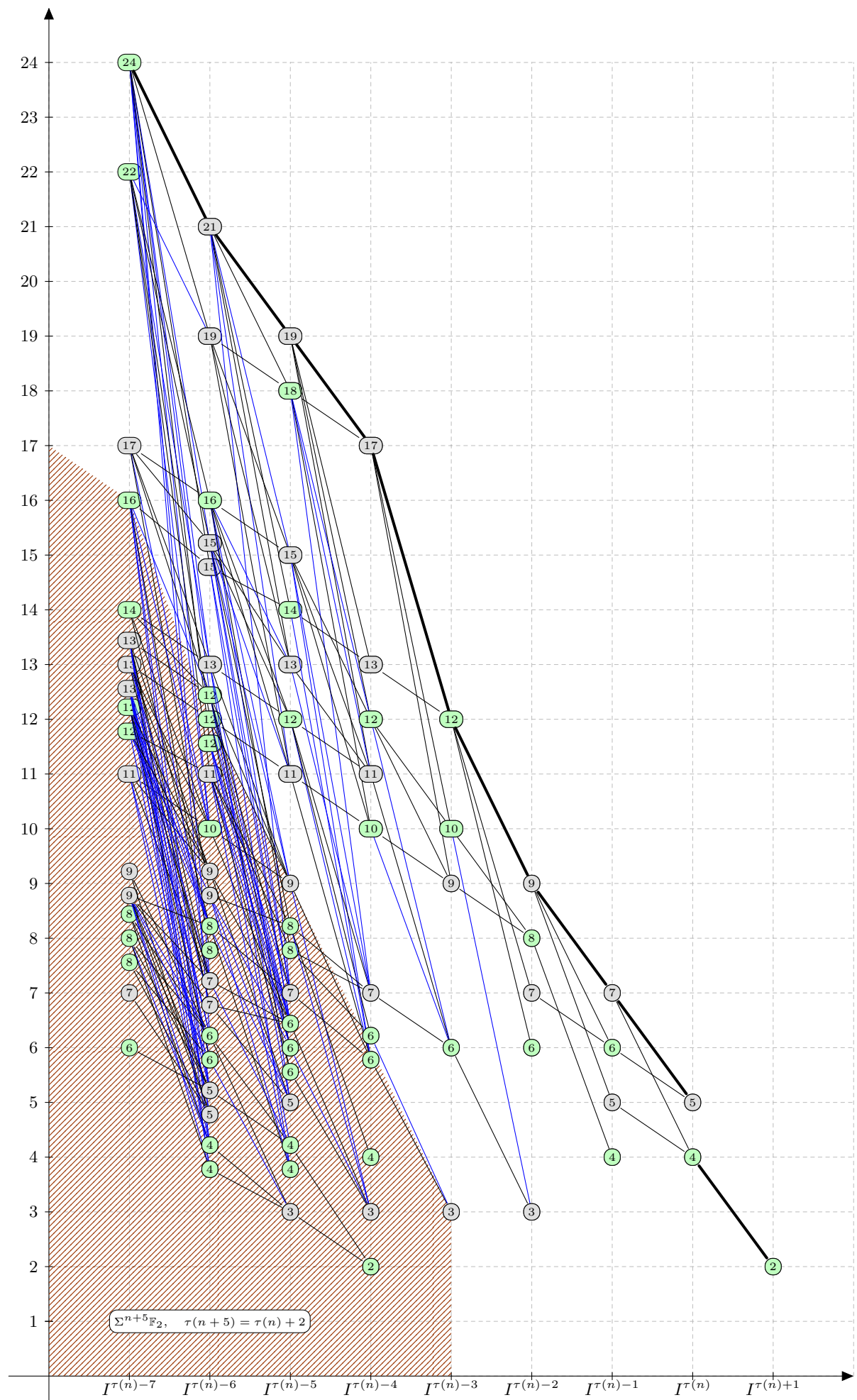
3. Cela provient de la zone du rectangle \mathcal{C} de la résolution injective minimale de $\Sigma^{30}\mathbb{F}_2$.

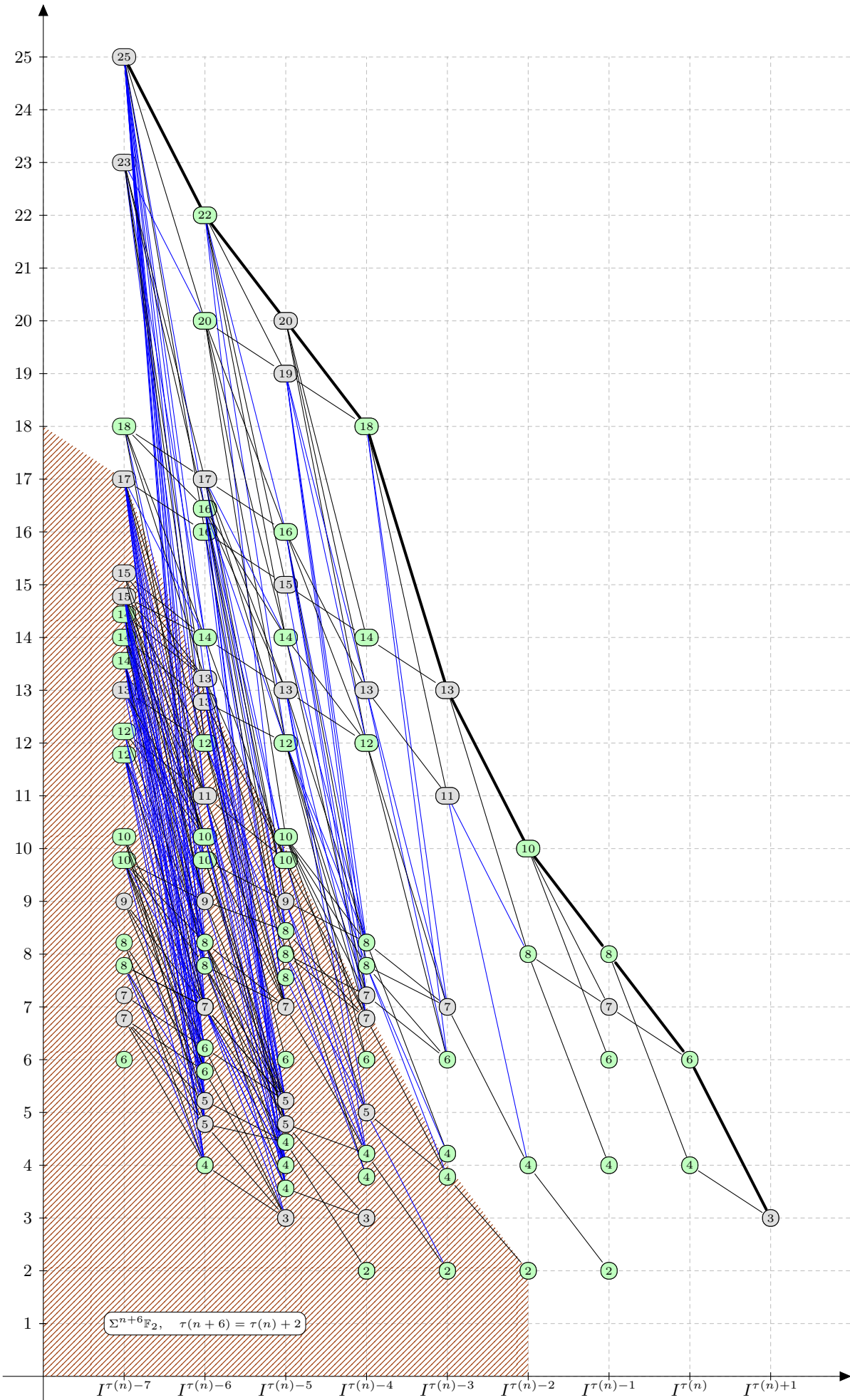


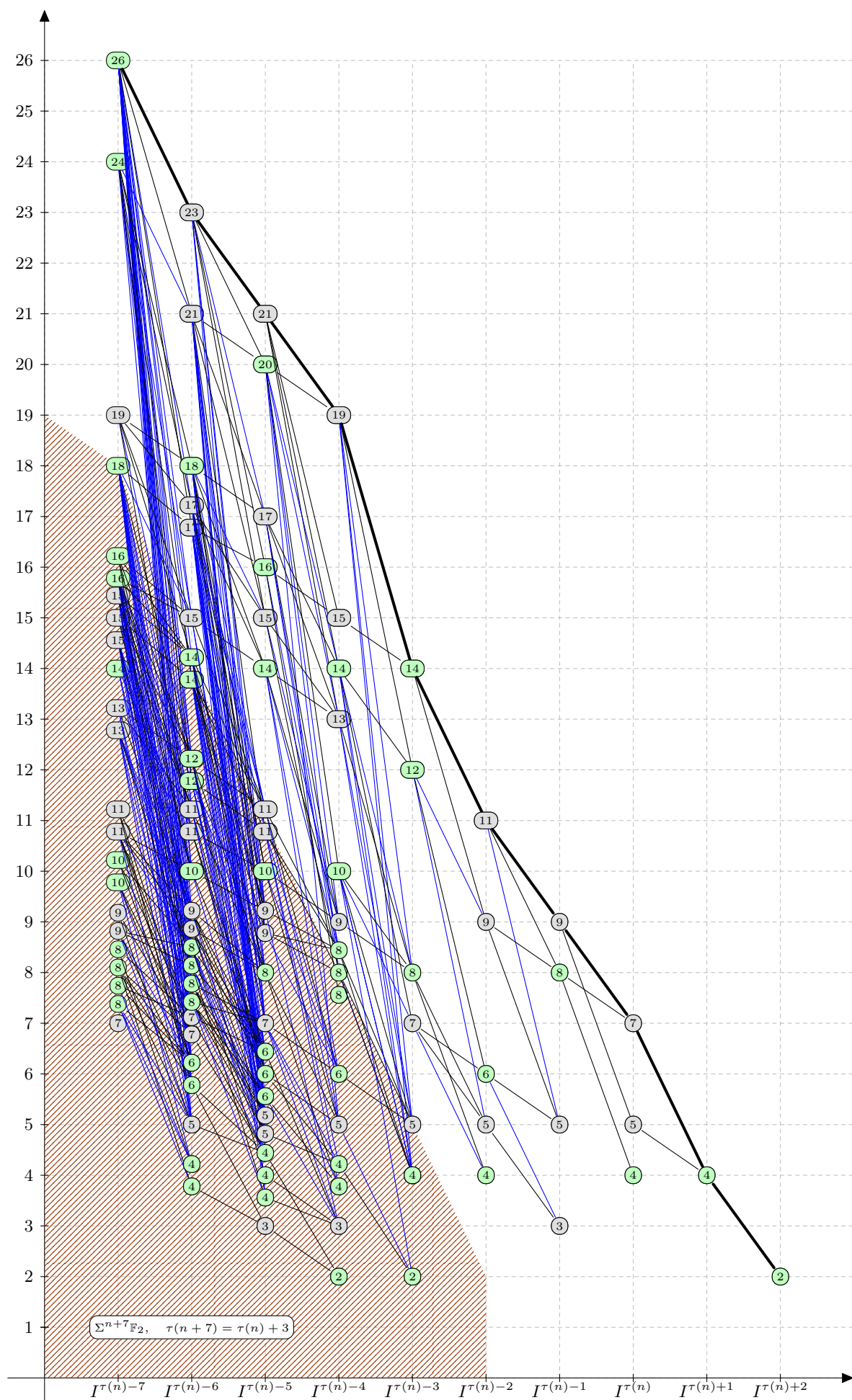


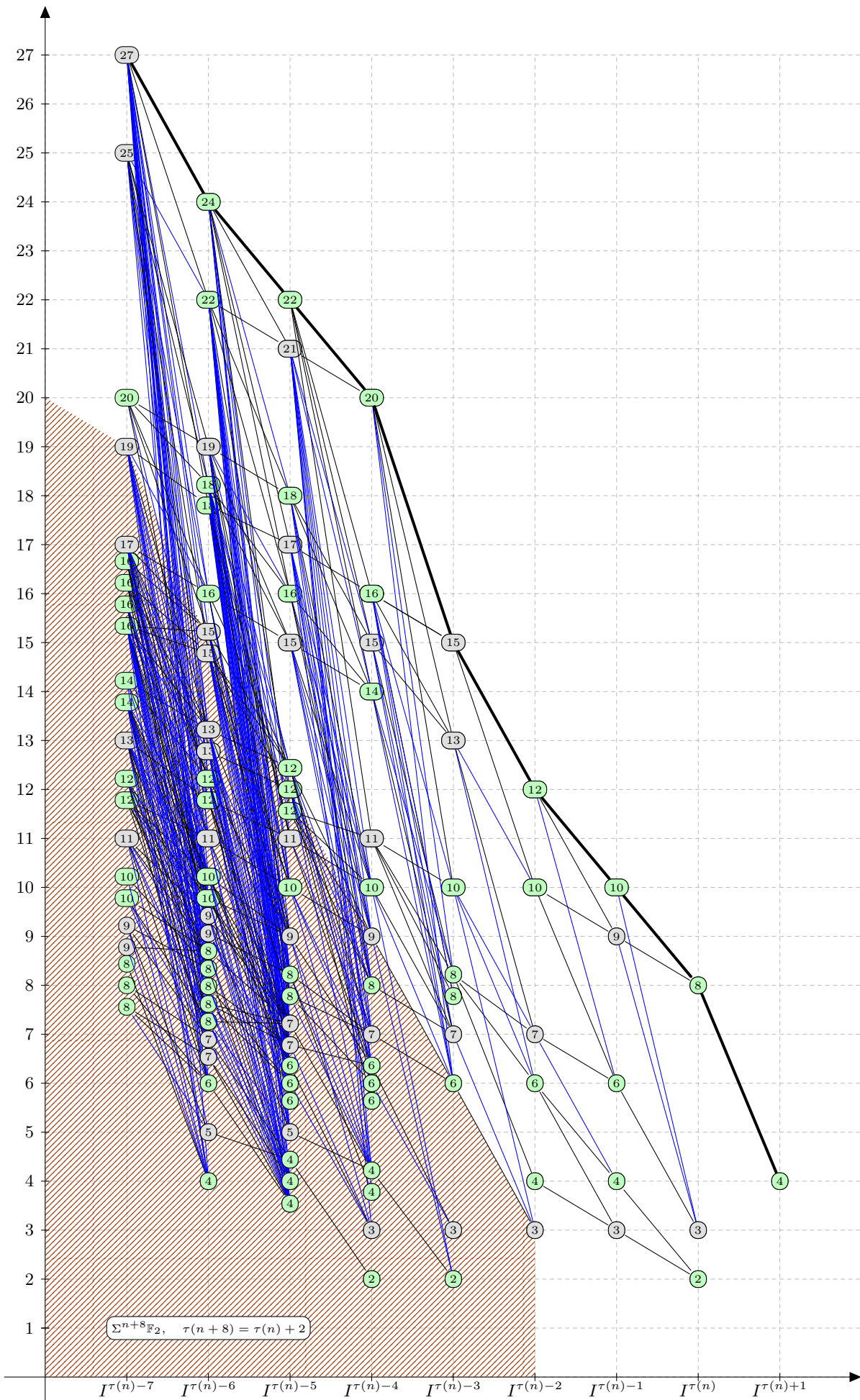


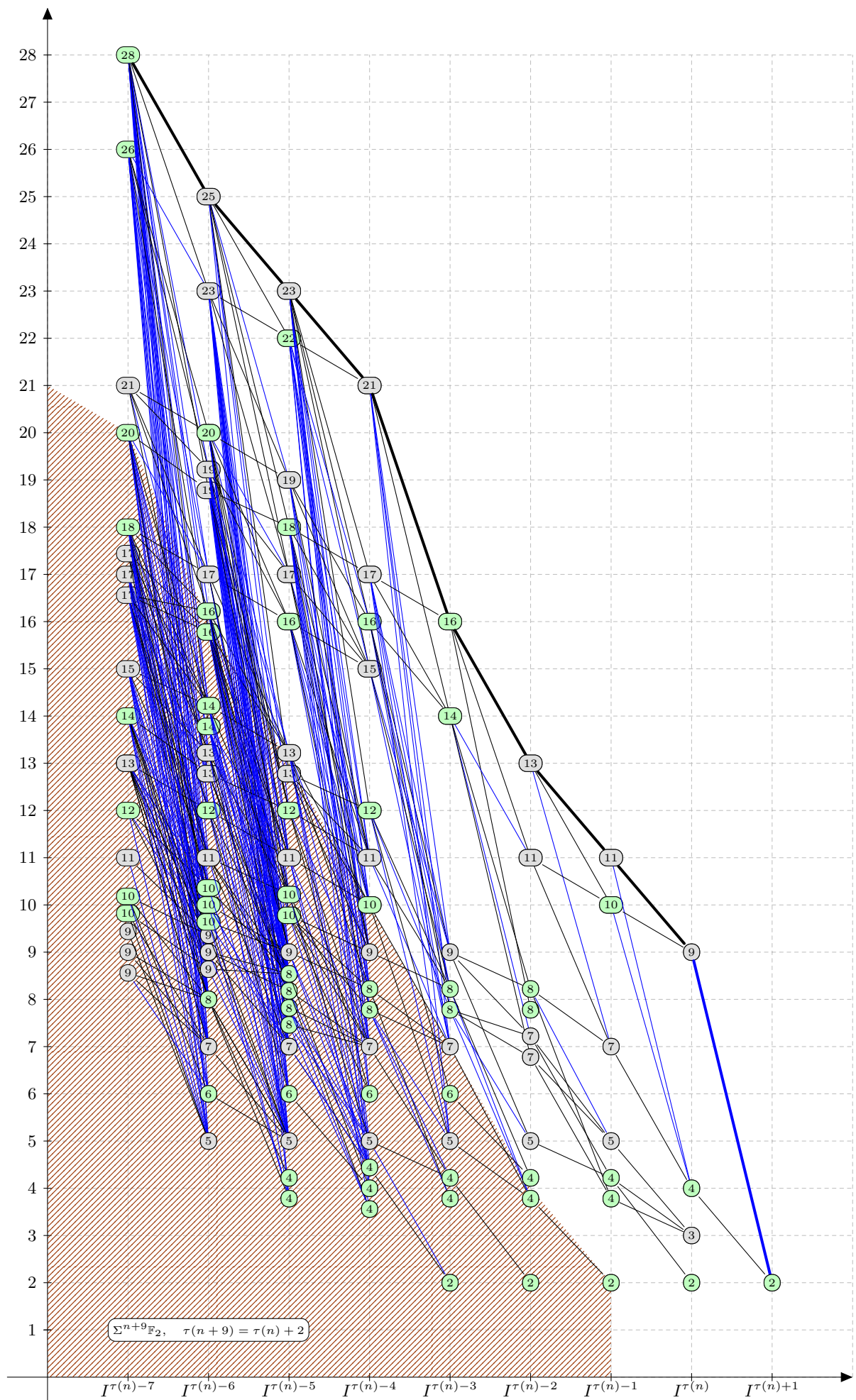


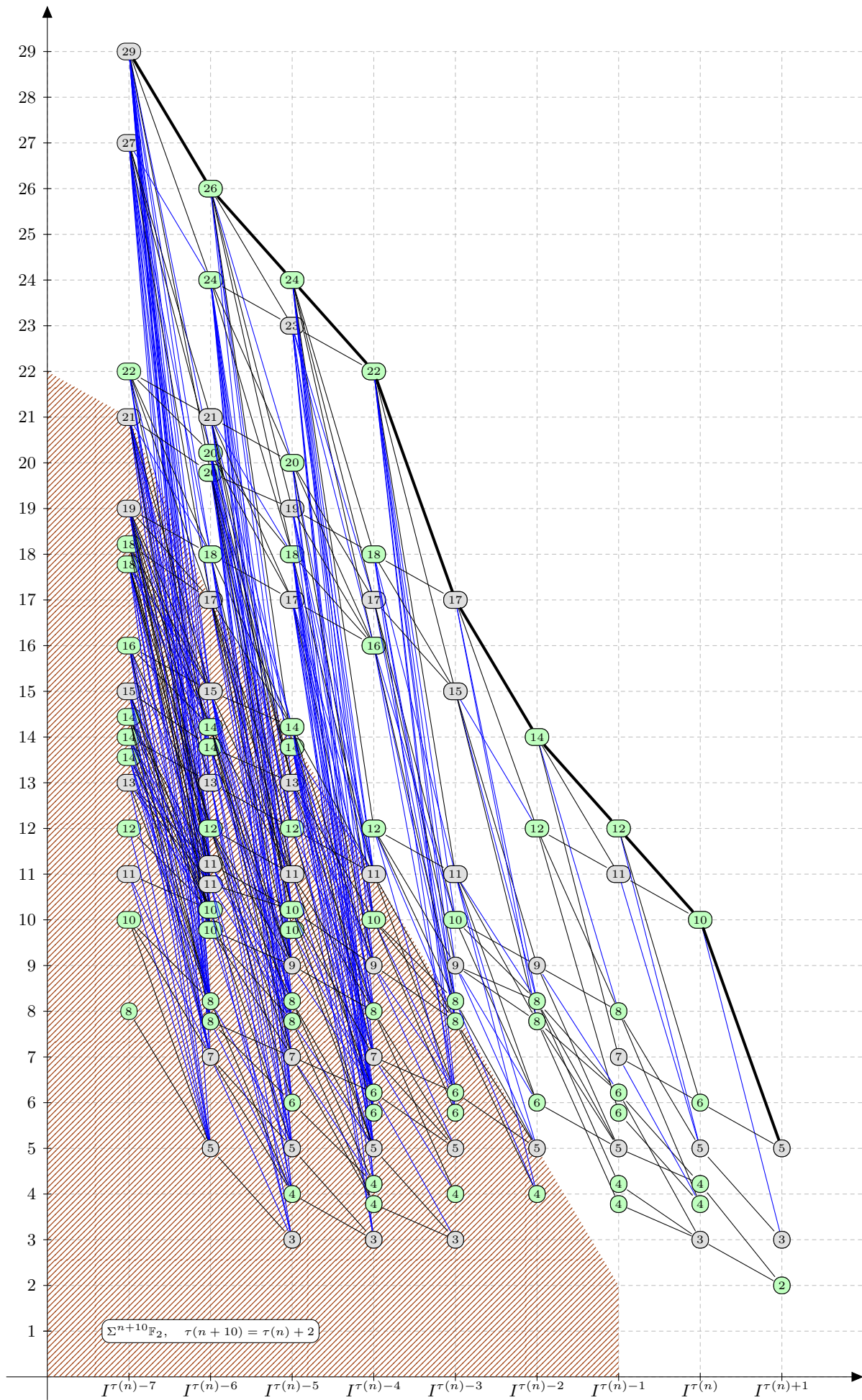


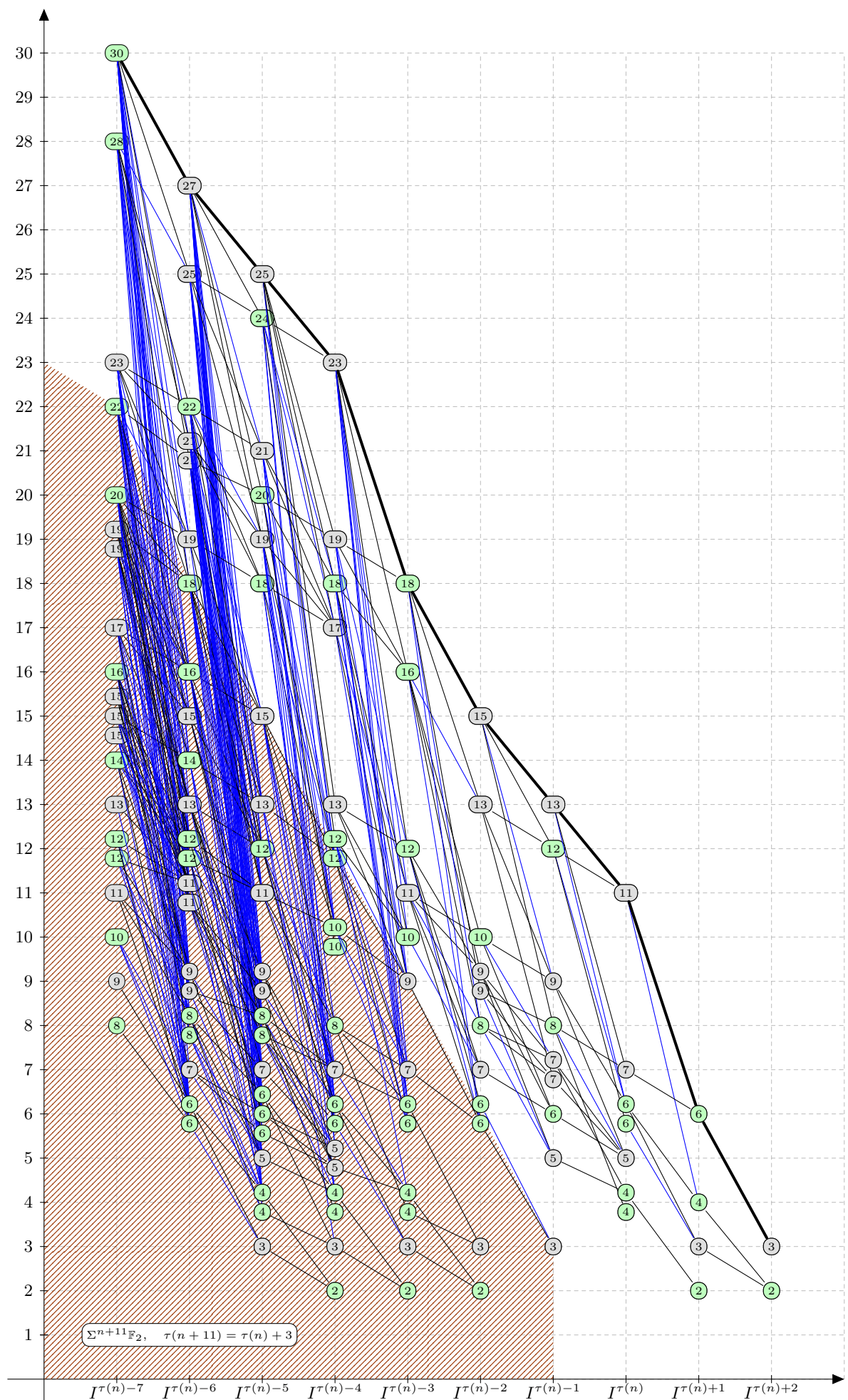


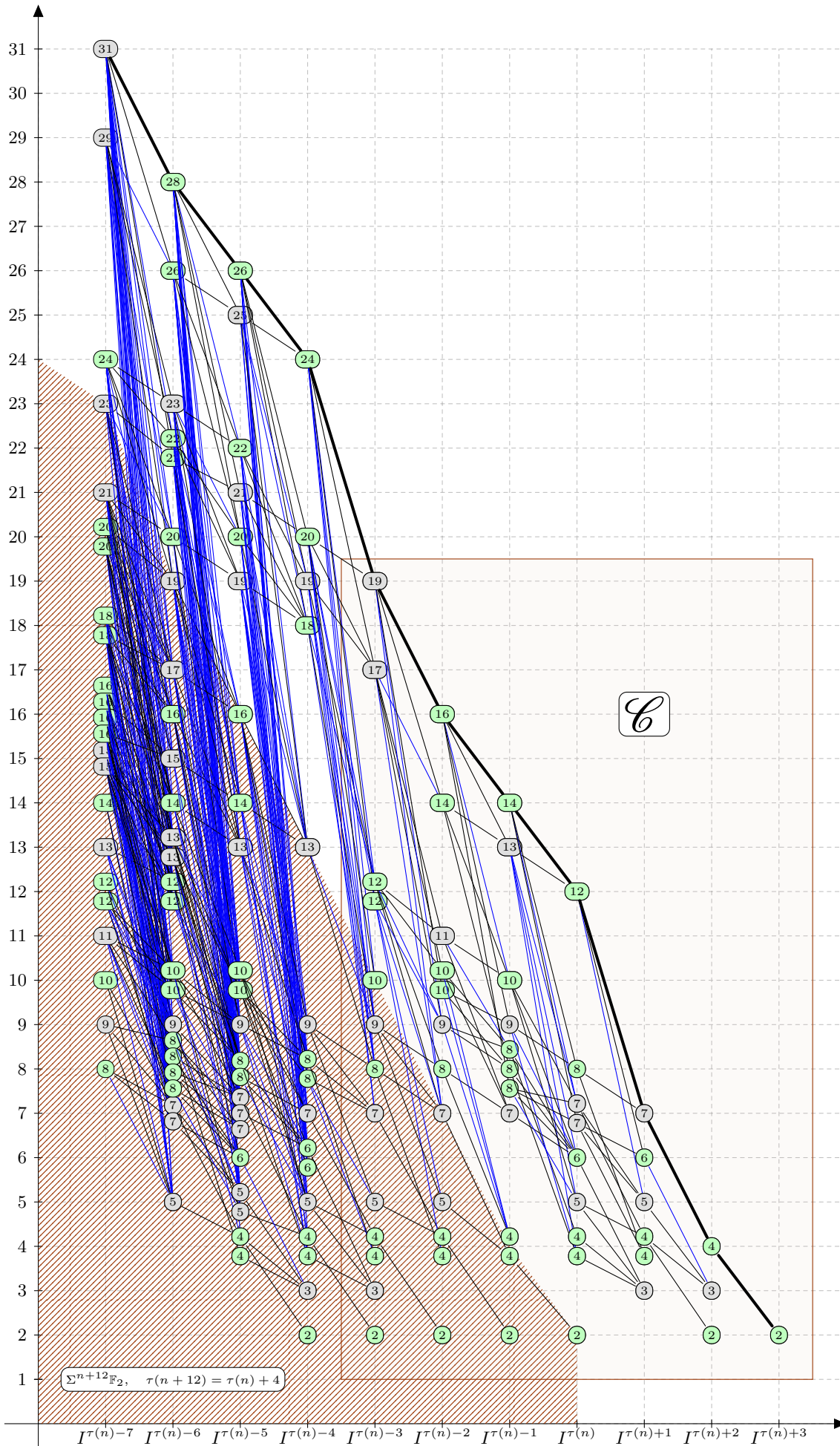












On se trouve de nouveau le rectangle \mathcal{C} de la résolution injective minimale de $\Sigma^{30}\mathbb{F}_2$ pour la zone $\left(I^{\tau(n+12)-i}, 1 \leq i \leq 7\right)$ de la résolution injective minimale de $\Sigma^{n+12}\mathbb{F}_2$. Cela conclut donc la périodicité de la fonction τ d'où le théorème 3.2.2.2.

La procédure de Maple

Dans cette annexe le code pour la procédure de Maple qu'on a utilisé dans le chapitre 3 sera donné.

```
restart;

BrownGitler:=module()

export BG, BG2, BRG, Ta, adem, ademat, ademprod, annul, annulleft, annulright, annulrl,
arraygraph, arraygraphique, augmentlbm, bg, bg2, bga, bgprod, binommod2,
bottommattotheright, brown, brown1, brown2, brown3, brown4, browngitler, code,
codebg, coltomat, coltomatlast, coltomatleft, count1, countcolumn, countres,
countrow, divs, divsm, divsmbottom, divsmlb, divsmleft, ecrire, ex, exa, exc,
excol, excolred, exrow, exrowred, ext, exta, extractmats, extracts, firstcoltomat,
generate, graphiquearray, graphiquematrix, graphiqueres, latexext, latexextmat,
matgraph, matgraphique, multinom, pera, peri, remiseazero, reparray, replace,
replacearray, replacematrix, repmat, resgraph, resgraphique, rowtoleftmat, test;

local setup;

global s;

option package, load = setup;

setup:=proc()
  local Zero, One, converts;
  global 'type/adbasis', 'type/ad', 'type/SqI';

  print("Brown-Gitler package");

  interface(rtables:=infinity);

  Zero:=identical(0);
  One:=identical(1);

  'type/SqI':={Zero, One, specfunc(nonnegint, s)}:

  'type/adbasis':=proc(a) # type admissible basis
    local i, A;
    if not type(a, SqI) then RETURN(false)
    fi;
    A:=[op(converts(a))];
    for i to nops(A)-1 do
      if A[i]<2*A[i+1] then RETURN(false)
      fi;
    od;
    true;
  end:

  'type/ad':={Zero, One, adbasis, ''+'''(adbasis)}: # type admissible

  converts:=proc(a) # convert s function to array
    local t;
    t:=[op(a)];
    t;
  end:

  s:=proc() # Steenrod operations
```

```

    local i,j,ans,newargs,f;
    newargs:=[args];
    if nargs<1 then
        ERROR('product must have at least one argument. ');
    fi;
    # zero=0
    if member(0,newargs) then RETURN(0)
    fi;
    # associative
    newargs:=map(proc(x)
        if type(x,function) and op(0,x)='s' then op(x)
        else x
        fi;
        end,newargs);
    # multilinearity
    for i to nops(newargs) while not type(newargs[i],'+') do
    od;
    if i<=nops(newargs) then
        f:=subs(a1=op(newargs[1..i-1]),
            a2=op(newargs[i+1..nops(newargs)]),
            proc(x)
                's'(a1,x,a2)end);
        RETURN(map(f,newargs[i]) mod 2);
    fi;
    'procname'(op(newargs));
end:
# end of setup
end:

#call setup
setup();

BG := proc(n:: posint)
local t;
1   if n = 1 then
2       RETURN([1])
    end if;
3   if n = 2 then
4       RETURN([Matrix([[2, s(1)], [0, 1]])])
    end if;
5   if n = 3 then
6       RETURN(Array([[Matrix([[3, s(1)], [0, 2]])], [Matrix([[2, s(1)], [0, 1]])]]))
    end if;
7   t := Array([[Matrix([[3, s(1)], [0, 2]])], [Matrix([[2, s(1)], [0, 1]])]]);
8   if n = 4 then
9       bga(t)
    else
10      bga(BG(n-1))
    end if
end proc

BG2 := proc(n:: integer, m:: posint)
local t;
1   if n = 0 then
2       RETURN(m)
    end if;
3   if n = 1 then
4       if 'mod'(m,2) = 0 then
5           RETURN(m+1)
        else
6           RETURN(Matrix([[m+1, s(1/2*m+1/2)], [0, 1/2*m+1/2]]))
        end if;
    end if;
7   if n = 2 then
8       if 'mod'(m,4) = 0 then
9           RETURN(BG2(n-1,m+1))
        elif 'mod'(m,4) = 1 then
10          RETURN(Array([[Matrix([[m+2, s(1/2*m+1/2)], [0, 1/2*m+3/2]])],
                        [Matrix([[1/2*m+3/2, s(1/4*m+3/4)], [0, 1/4*m+3/4]])]]))
        elif 'mod'(m,4) = 2 then
11          RETURN(BG2(n-1,m+1))
        elif 'mod'(m,4) = 3 then
12          RETURN(Matrix([[m+2, s(1/2*m+1/2)], [0, 1/2*m+3/2]]))
        end if;
    end if;
13  if n = 3 then
14      if 'mod'(m,4) = 0 then
15          RETURN(BG2(n-1,m+1))
        elif 'mod'(m,4) = 1 then
16          RETURN(bg2(BG2(n-1,m)))
        elif 'mod'(m,4) = 2 then

```

```

17     RETURN(BG2(n-1,m+1))
18     elif 'mod'(m,4) = 3 then
19         t:=Array ([[Matrix ([[m+3,s(1/2*m+1/2),s(1/2*m+3/2)],[0,1/2*m+5/2,1/2*m+3/2]])],
20             [Matrix ([[1/2*m+5/2, s(1/4*m+5/4)], [1/2*m+3/2, 0], [0, 1/4*m+5/4]])]);
21     RETURN(t)
22     end if
23 end if;
24 if n = 4 then
25     if 'mod'(m,4) = 2 then
26         RETURN(BG2(n-1,m+1))
27     else
28         RETURN(bg2(BG2(n-1,m)))
29     end if
30 end if;
31 if 3 < n then
32     RETURN(bg2(BG2(n-1,m)))
33 end if
34 end proc

BRG := proc(m::integer, n::integer)
35 local i;
36     1 parse(cat("read","BG",sprintf(%a,m),".m"),statement);
37     2 for i to m do
38         3 if n = i then
39             4 parse(cat("RETURN(brg",sprintf(%a,i),")"),statement)
40         end if
41     end do;
42     5 if m < n then
43         6 RETURN(procname(m,n-1))
44     end if
45 end proc

adem := proc(a::{SqI, '+'(SqI)})
46 local i, A, B, C, S;
47     1 if type(a,ad) then
48         2 RETURN(a)
49     elif type(a,'+') then
50         3 RETURN('mod'(map(procname,a),2))
51     else
52         4 for i to nops(a)-1 while 2*op(1,op(i+1,a)) <= op(1,op(i,a)) do
53             5 NULL
54         end do;
55         6 A := op(1,op(i,a));
56         7 B := op(1,op(i+1,a));
57         8 S := 'mod'(multinom(B-A-1,A)*s(A+B)+add(multinom(B+C-A-1,A-2*C)*s(A+B-C,C),
58             C = max(A-B+1,1) .. floor(1/2*A)),2);
59         9 RETURN(adem('mod'(eval(subsop(i = S,i+1 = NULL,a)),2)))
60     end if
61 end proc

ademmat := proc()
62 local newargs, l, m, i, j, A;
63     1 l := op([1, 1],args);
64     2 m := op([1, 2],args);
65     3 A := args;
66     4 for i to l do
67         5 for j to m do
68             6 A[i,j] := adem(A[i,j])
69         end do
70     end do;
71     7 A
72 end proc

ademprod := proc(a::Matrix, b::Matrix)
73 local c, i, j, k, m, n, p, t;
74     1 m, n, p := op([1, 1],a), op([1, 2],b), op([1, 2],a);
75     2 if op([1, 1],b) <> p then
76         3 error "incompatible dimensions"
77     end if;
78     4 c := Matrix(m,n);
79     5 for i to m do
80         6 for j to n do
81             7 t := 0;
82             8 for k to p do
83                 9 if a[i,k] = 1 or b[k,j] = 1 then
84                     10 t := 'mod'(t+adem(s(a[i,k]*b[k,j])),2)
85                 else
86                     11 t := 'mod'(t+adem(s(a[i,k],b[k,j])),2)
87                 end if
88             end do;
89         end do;
90     end do;

```

```

12         c[i,j] := t
        end do
    end do;
13     c
end proc

annul := proc(b::Matrix)
local m, n, A, i, j, L, K;
1   m := op([1, 1],b);
2   n := op([1, 2],b);
3   A := b;
4   L := ['$'(1 .. m)];
5   K := ['$'(1 .. n)];
6   for i to m-1 do
7       for j from 2 to n do
8           if type(b[i,j],1) then
9               L := subsop(i = 0,L);
10              K := subsop(j = 0,K);
11              A := replace(i,j,A)
            end if
        end do
    end do;
12   L := subs(0 = NULL,L);
13   K := subs(0 = NULL,K);
14   A := LinearAlgebra[SubMatrix](A,L,K);
15   A
end proc

annulleft := proc(a::Matrix, b::Matrix)
local m, n, A, B, C, i, j, L, K, y, r;
1   if op([1, 2],a) <> op([1, 1],b) then
2       error "incompatible dimensions"
    end if;
3   r := ['$'(1 .. op([1, 1],a))];
4   m := op([1, 1],b);
5   n := op([1, 2],b);
6   A := b;
7   L := ['$'(1 .. m)];
8   K := ['$'(1 .. n)];
9   y := ['$'(1 .. m)];
10  for i to m-1 do
11      for j from 2 to n do
12          if type(A[i,j],1) then
13              L := subsop(i = 0,L);
14              K := subsop(j = 0,K);
15              y := subsop(i+1 = 0,y);
16              A := replace(i,j,A)
            end if
        end do
    end do;
17  L := subs(0 = NULL,L);
18  K := subs(0 = NULL,K);
19  y := subs(0 = NULL,y);
20  A := LinearAlgebra[SubMatrix](A,L,K);
21  B := LinearAlgebra[SubMatrix](a,r,y);
22  C := Array([B, A]);
23  C
end proc

annulright := proc(b::Matrix, c::Matrix)
local m, n, A, B, C, i, j, L, K, y, r;
1   if op([1, 2],b) <> op([1, 1],c) then
2       error "incompatible dimensions"
    end if;
3   r := ['$'(1 .. op([1, 2],c))];
4   m := op([1, 1],b);
5   n := op([1, 2],b);
6   A := b;
7   L := ['$'(1 .. m)];
8   K := ['$'(1 .. n)];
9   y := ['$'(1 .. n)];
10  for i to m-1 do
11      for j from 2 to n do
12          if type(A[i,j],1) then
13              L := subsop(i = 0,L);
14              K := subsop(j = 0,K);
15              y := subsop(j-1 = 0,y);
16              A := replace(i,j,A)
            end if
        end do
    end do;

```

```

17  L := subs(0 = NULL,L);
18  K := subs(0 = NULL,K);
19  y := subs(0 = NULL,y);
20  A := LinearAlgebra[SubMatrix](A,L,K);
21  B := LinearAlgebra[SubMatrix](c,y,r);
22  C := Array([A, B]);
23  C
end proc

annulrl := proc(a::Matrix, b::Matrix, c::Matrix)
local m, n, A, B, C, D, i, j, L, K, x, y, r, s;
1  if op([1, 2],a) <> op([1, 1],b) then
2      error "incompatible dimensions"
3  end if;
4  if op([1, 2],b) <> op([1, 1],c) then
5      error "incompatible dimensions"
6  end if;
7  r := ['$(1 .. op([1, 1],a))];
8  s := ['$(1 .. op([1, 2],c))];
9  m := op([1, 1],b);
10 n := op([1, 2],b);
11 A := b;
12 L := ['$(1 .. m)];
13 K := ['$(1 .. n)];
14 x := ['$(1 .. m)];
15 y := ['$(1 .. n)];
16 for i to m-1 do
17     for j from 2 to n do
18         if type(A[i,j],1) then
19             L := subsop(i = 0,L);
20             K := subsop(j = 0,K);
21             x := subsop(i+1 = 0,x);
22             y := subsop(j-1 = 0,y);
23             A := replace(i,j,A)
24         end if
25     end do;
26 end do;
27 L := subs(0 = NULL,L);
28 K := subs(0 = NULL,K);
29 y := subs(0 = NULL,y);
30 x := subs(0 = NULL,x);
31 A := LinearAlgebra[SubMatrix](A,L,K);
32 B := LinearAlgebra[SubMatrix](a,r,x);
33 C := LinearAlgebra[SubMatrix](c,y,s);
34 D := Array([B, A, C]);
35 D
end proc

arraygraph := proc(a::Array)
local i, s, t;
1  s := ArrayTools[Size](a,1);
2  t := matgraph(1,a[1,1]);
3  for i from 2 to s do
4      t := matgraph(i,a[i,1]), t
5  end do;
6  plots[multiple](plot,t)
end proc

arraygraphique := proc(a::Array)
local i, s, t;
1  s := ArrayTools[Size](a,1);
2  t := matgraphique(1,a[1,1]);
3  for i from 2 to s do
4      t := matgraphique(i,a[i,1]), t
5  end do;
6  plots[multiple](plot,t)
end proc

augmentlrm := proc(a::Matrix)
local t, m, M, N, i, j;
1  t := op([1, 1],a);
2  m := op([1, 2],a);
3  M := Matrix(t,m);
4  for i to t-1 do
5      M[i,1] := 1
6  end do;
7  for i from 2 to m do
8      M[t,i] := 1
9  end do;
10 N := M+a;

```

```

9      N
end proc

bg := proc(a::Array(Matrix))
local s, i, A, b, c, d, m1, m2, m3, m4, e, n, t, h, x, y, z, g;
1    if ArrayTools[Size](a,2) <> 1 then
2        error "incompatible dimensions"
    end if;
3    s := ArrayTools[Size](a,1);
4    for i to s-1 do
5        if op([1, 2],a[i,1]) <> op([1, 1],a[i+1,1]) then
6            error "incompatible dimensions"
        end if
    end do;
7    A := Array(1 .. s+1,1 .. 1);
8    b := augmentlbm(a[1,1]);
9    A[1,1] := bottommattotheright(b);
10   for i from 2 to s do
11       c := augmentlbm(a[i-1,1]);
12       d := augmentlbm(a[i,1]);
13       m1 := LinearAlgebra[SubMatrix](d,[1 .. op([1, 1],d)-1],[1 .. op([1, 2],d)]);
14       m2 := firstcoltomat(d);
15       m3 := extractmats(bgprod(c,d));
16       m4 := divsmbottom(c);
17       A[i,1] := '<,>('<|>'(m1,m2),'<|>'(m3,m4))
    end do;
18   e := augmentlbm(a[s,1]);
19   n := rowtoleftmat(e);
20   t := divsmlb(e);
21   A[s+1,1] := '<,>'(n,t);
22   A
end proc

bg2 := proc(a::Array(Matrix))
local A, k, i;
1    A := bga(a);
2    k := ArrayTools[Size](A,1);
3    for i from 0 to k-1 do
4        if op([1, 2],A[k-i,1]) = 1 then
5            A := Array(1 .. k-i-1,1 .. 1,A)
        end if
    end do;
6    A
end proc

bga := proc(a::Array(Matrix))
local s, i, A, b, c, d, m1, m2, m3, m4, e, n, t, h, x, y, z, g, r, k;
1    if ArrayTools[Size](a,2) <> 1 then
2        error "incompatible dimensions"
    end if;
3    s := ArrayTools[Size](a,1);
4    for i to s-1 do
5        if op([1, 2],a[i,1]) <> op([1, 1],a[i+1,1]) then
6            error "incompatible dimensions"
        end if
    end do;
7    A := Array(1 .. s+1,1 .. 1);
8    b := augmentlbm(a[1,1]);
9    A[1,1] := bottommattotheright(b);
10   for i from 2 to s do
11       c := augmentlbm(a[i-1,1]);
12       d := augmentlbm(a[i,1]);
13       m1 := LinearAlgebra[SubMatrix](d,[1 .. op([1, 1],d)-1],[1 .. op([1, 2],d)]);
14       m2 := firstcoltomat(d);
15       m3 := extractmats(bgprod(c,d));
16       m4 := divsmbottom(c);
17       A[i,1] := '<,>('<|>'(m1,m2),'<|>'(m3,m4))
    end do;
18   e := augmentlbm(a[s,1]);
19   n := rowtoleftmat(e);
20   t := divsmlb(e);
21   A[s+1,1] := '<,>'(n,t);
22   h := ArrayTools[Size](A,1);
23   g := annulright(A[1,1],A[2,1]);
24   A[1,1] := g[1];
25   A[2,1] := g[2];
26   for i from 2 to h-1 do
27       x := A[i-1,1];
28       y := A[i,1];
29       z := A[i+1,1];

```



```

6   fprintf(fp, '\t if n>%a then \n\t\t RETURN(bga(BG1(n-1)))\n\t fi;\n end:\n',m);
7   fclose(fp)
end proc

brown2 := proc(m::integer)
local fp;
1   fp := fopen(cat("add",m,".txt"),WRITE);
2   fprintf(fp, '\t if n=%a then\n\t\t RETURN(%a)\n\t fi;\n',i,BG(i));
3   fclose(fp)
end proc

brown3 := proc(m::integer)
local i;
1   for i to m do
2       cat(brg, sprintf(%a,i)) := BG(i)
    end do;
3   parse(cat("save", sprintf("%q", anames(user)), ", 'BG", sprintf(%a,m), ".m'"), statement)
end proc

brown4 := proc(m::integer)
1   cat(brg, sprintf(%a,m)) := BG(m);
2   save cat(brg, sprintf(%a,m)), cat(Brown, sprintf(%a,m), '.m')
end proc

browngitler := proc(n::integer)
local a;
1   if n = 1 then
2       RETURN([1])
    elif n = 2 then
3       a := Array(1 .. 2, 1 .. 1);
4       a[1,1] := 2;
5       a[2,1] := 1;
6       RETURN(a)
    else
7       RETURN(brown(browngitler(n-1)))
    end if
end proc

code := proc(m::integer, M::Array)
local i, l, doc, docu, fil;
1   doc := fopen(cat("graph",m,".txt"),WRITE);
2   fclose(doc);
3   docu := fopen(cat("graphe",m,".txt"),WRITE);
4   fclose(docu);
5   fil := fopen(cat("texte",m,".txt"),WRITE);
6   fclose(fil);
7   l := ArrayTools[Size](M,1);
8   for i to l do
9       ecrire(m,i,M[i,1])
    end do
end proc

codebg := proc(n::integer)
1   code(n,BG(n))
end proc

coltomat := proc(a::Matrix)
local c, i, j, k, m;
1   if op([1, 2],a) <> 1 then
2       error "incompatible dimensions"
    end if;
3   m := op([1, 1],a);
4   j := 0;
5   for i to m do
6       if 'mod'(a[i,1],2) = 0 then
7           j := j+1
        end if
    end do;
8   c := Matrix(j,1);
9   k := 1;
10  for i to m do
11      if 'mod'(a[i,1],2) = 0 then
12          c[k,1] := 1/2*a[i,1];
13          k := k+1
        end if
    end do;
14  c
end proc

coltomatlast := proc(a::Matrix)
local c, i, j, k, m, l;
1   m := op([1, 1],a);

```

```

2   j := 0;
3   for i to m-1 do
4       if 'mod'(a[i,1],2) = 0 then
5           j := j+1
6       end if
7   end do;
8   c := Matrix(m,j);
9   k := 1;
10  for i to m-1 do
11      if 'mod'(a[i,1],2) = 0 then
12          c[i,k] := s(1/2*a[i,1]);
13          c[m,k] := 1/2*a[i,1];
14          k := k+1
15      end if
16  end do;
17  c
end proc

coltomatleft := proc(a::Matrix)
local c, i, j, k, m, l;
1   m := op([1, 1],a);
2   j := 0;
3   for i to m-1 do
4       if 'mod'(a[i,1],2) = 0 then
5           j := j+1
6       end if
7   end do;
8   c := Matrix(m-1,j+1);
9   k := 2;
10  for i to m-1 do
11      if 'mod'(a[i,1],2) = 0 then
memory used=3.8MB, alloc=8.3MB, time=0.10
12          c[i,k] := s(1/2*a[i,1]);
13          c[i,1] := a[i,1];
14          k := k+1
15      end if
16  end do;
17  c
end proc

count1 := proc(n::integer, a::Array(Matrix))
local h, A, i;
1   if ArrayTools[Size](a,2) <> 1 then
2       error "incompatible dimensions"
3   end if;
4   h := ArrayTools[Size](a,1);
5   A := Array(1 .. 1,1 .. h+1);
6   for i to h do
7       A[1,i] := countcolumn(n,a[i,1])
8   end do;
9   A[1,h+1] := countrow(n,a[h,1]);
10  A
end proc

countcolumn := proc(n::integer, a::Matrix)
local k, t, i;
1   k := op([1, 1],a);
2   t := 0;
3   for i to k-1 do
4       if a[i,1] = n then
5           t := t+1
6       end if
7   end do;
8   t
end proc

countres := proc(n::integer, a::Array(Matrix))
local h, A, i;
1   if ArrayTools[Size](a,2) <> 1 then
2       error "incompatible dimensions"
3   end if;
4   h := ArrayTools[Size](a,1);
5   A := Array(1 .. h+2,1 .. 1);
6   for i to h do
7       A[i,1] := [i-1, countcolumn(n,a[i,1])]
8   end do;
9   A[h+1,1] := [h, countrow(n,a[h,1])];
10  A[h+2,1] := [n];
11  A
end proc

countrow := proc(n::integer, a::Matrix)
local k, l, t, i;

```

```

1  l := op([1, 1],a);
2  k := op([1, 2],a);
3  t := 0;
4  for i from 2 to k do
5      if a[l,i] = n then
6          t := t+1
7      end if
8  end do;
9  t
end proc

divs := proc(a::{SqI, '+'(SqI)})
local newargs, l, i, c, d;
1  if not type(a,ad) then
2      RETURN(divs('mod'(adem(a),2)))
3  end if;
4  if type(a,'+') then
5      RETURN('mod'(map(procname,a),2))
6  elif a = 0 then
7      RETURN(0)
8  elif a = 1 then
9      RETURN(1)
10 else
11     newargs := [op(a)];
12     d := [];
13     for i to nops(a) do
14         if 'mod'(newargs[i],2) = 0 then
15             d := [op(d), 1/2*newargs[i]]
16         else
17             d := [op(d), 0]
18         end if
19     end do;
20     RETURN(s(op(d)))
21 end if
end proc

divsm := proc(a::Matrix)
local newargs, l, m, i, j, A, c;
1  l := op([1, 1],a);
2  m := op([1, 2],a);
3  A := Matrix(1,m);
4  for i to l do
5      for j to m do
6          A[i,j] := divs(adem(a[i,j]))
7      end do
8  end do;
9  A
end proc

divsmbottom := proc(a::Matrix)
local newargs, l, m, i, j, A, c, B, L, K, x, y, E, z, F;
1  l := op([1, 1],args);
2  m := op([1, 2],args);
3  A := a;
4  x := 0;
5  y := 0;
6  L := [];
7  K := [];
8  for j to l-1 do
9      if 'mod'(A[j,1],2) = 0 then
10         x := x+1;
11         L := [op(L), j]
12     end if
13 end do;
14 for j from 2 to m do
15     if 'mod'(A[1,j],2) = 0 then
16         y := y+1;
17         K := [op(K), j]
18     end if
19 end do;
20 B := Matrix(1,y);
21 z := 1;
22 for j from 2 to m do
23     if 'mod'(A[1,j],2) = 0 then
24         B[1,z] := 1/2*A[1,j];
25         z := z+1
26     end if
27 end do;
28 E := LinearAlgebra[SubMatrix](A,L,K);
29 E := divsm(E);
30 F := '<,>'(E,B);
31 F
end proc

```

end proc

```
divsm1b := proc(a::Matrix)
local newargs, l, m, i, j, A, c, B, L, K, x, y, E, z, F;
1   l := op([1, 1], args);
2   m := op([1, 2], args);
3   x := 0;
4   y := 0;
5   L := [];
6   K := [];
7   for j from 2 to m do
8       if 'mod'(a[l, j], 2) = 0 then
9           y := y+1;
10          K := [op(K), j]
11      end if
12  end do;
13  B := Matrix(1, y+1);
14  z := 1;
15  for j from 2 to m do
16      if 'mod'(a[l, j], 2) = 0 then
17          B[z, 1] := 1/2*a[l, j];
18          z := z+1;
19      end if
20  end do;
21  E := divsmleft(a);
22  F := '<,>('(<,>(E), '<,>(B));
23  F
end proc
```

```
divsmleft := proc()
local newargs, l, m, i, j, A, c, B, L, K, x, y, E, z, F, k;
1   l := op([1, 1], args);
2   m := op([1, 2], args);
3   A := args;
4   x := 0;
5   y := 0;
6   L := [];
7   K := [];
8   for j to l-1 do
9       if 'mod'(A[j, 1], 2) = 0 then
10          x := x+1;
11          L := [op(L), j]
12      end if
13  end do;
14  for j from 2 to m do
15      if 'mod'(A[l, j], 2) = 0 then
16          y := y+1;
17          K := [op(K), j]
18      end if
19  end do;
20  B := Matrix(x, 1);
21  k := 1;
22  for j to l-1 do
23      if 'mod'(A[j, 1], 2) = 0 then
24          B[k, 1] := 1/2*A[j, 1];
25          k := k+1;
26      end if
27  end do;
28  E := LinearAlgebra[SubMatrix](A, L, K);
29  E := divsm(E);
30  F := '<,>('(<,>(B, E));
31  F
end proc
```

```
ecrire := proc(m::integer, n::integer, M::Matrix)
local c, l, i, j, doc, fil, docu, ten;
1   c := ArrayTools[Size](M, 2);
2   l := ArrayTools[Size](M, 1);
3   doc := fopen(cat("graph", m, ".txt"), APPEND);
4   docu := fopen(cat("graphe", m, ".txt"), APPEND);
5   fil := fopen(cat("texte", m, ".txt"), APPEND);
6   for i to l-1 do
7       fprintf(doc, '\\node[rounded corners, fill=gray!25] (%aa%a) at (%a, %a) [draw]
8           {${a$};\\n', n, i, n, M[i, 1], M[i, 1]);
9       fprintf(docu, '\\node[rounded corners, fill=gray!25] (%aa%a) at (%a, %a) [draw]
10          {${a$};\\n', n, i, n, M[i, 1], M[i, 1])
11  end do;
12  fprintf(doc, '\\n');
13  fprintf(docu, '\\n');
14  for j from 2 to c do
15      fprintf(doc, '\\node[rounded corners, fill=gray!25] (%aa%a) at (%a, %a) [draw]
16          {${a$};\\n', n+1, j-1, n+1, M[l, j], M[l, j]);
17  end do;
18  fprintf(docu, '\\n');
19  fprintf(fil, '\\n');
end proc
```

```

13      fprintf(docu, '\\node[rounded corners, fill=gray!25] (%aa%a) at (%a, %a) [draw]
        {%%a$};\\n', n+1, j-1, n+1, M[l, j], M[l, j])
    end do;
14    for i to l-1 do
15      for j from 2 to c do
16        if M[i, j] <> 0 then
17          if generate(M[i, j]) = 1 then
18            fprintf(doc, '\\draw [-] (%aa%a) -- (%aa%a);\\n', n, i, n+1, j-1);
19            fprintf(docu, '\\draw [-] (%aa%a) -- (%aa%a);\\n', n, i, n+1, j-1);
20            fprintf(fil, '$a[%a]:%a:%a[%a]$', '\\\\ \\n', n, M[i, 1], M[i, j], n+1, M[l, j])
          elif generate(M[i, j]) = 0 then
21            fprintf(doc, '\\draw [-, color=blue] (%aa%a) -- (%aa%a);\\n', n, i, n+1, j-1);
22            fprintf(fil, '$a[%a]:%a:%a[%a]$', '\\\\ \\n', n, M[i, 1], M[i, j], n+1, M[l, j])
          end if
        end if
      end do
    end do;
23    fprintf(doc, '\\n');
24    fprintf(fil, '\\n');
25    fprintf(docu, '\\n');
26    fclose(doc);
27    fclose(docu);
28    fclose(fil)
end proc

ex := proc(k::integer)
local z, A, l, x, i, j;
  1  z := BG(k);
  2  A := Matrix(k+1, k+1);
  3  A[1, 1] := k;
  4  for l from 2 to k+1 do
  5    A[l, 1] := l-2;
  6    A[l, 1] := l-1
  end do;
  7  for i from 2 to k+1 do
  8    for j from 2 to k+1 do
  9      A[i, j] := ext(i-2, j-1, k)
    end do
  end do;
10  A
end proc

exa := proc(z::Array)
local A, l, x, i, j, k;
  1  k := ArrayTools[Size](z, 1);
  2  A := Matrix(k+1, k+1);
  3  A[1, 1] := k;
  4  for l from 2 to k+1 do
  5    A[l, 1] := l-2;
  6    A[l, 1] := l-1
  end do;
  7  for i from 2 to k+1 do
  8    for j from 2 to k+1 do
  9      A[i, j] := ext(i-2, j-1, k)
    end do
  end do;
10  A
end proc

exc := proc(a::Sql)
local i, n, t;
  1  if not type(a, adbasis) then
  2    error 'argument must be admissible'
  end if;
  3  if type(a, adbasis) then
  4    n := nops(a);
  5    t := [op(a)][1];
  6    for i from 2 to n do
  7      t := t-[op(a)][i]
    end do
  end if;
  8  t
end proc

excol := proc(i::integer, k::integer)
local z, A, l, x, j;
  1  z := BG(k);
  2  A := Matrix(2, k+1);
  3  for l from 2 to k+1 do
  4    A[1, l] := ext(i, l-1, k);
  5    A[2, l] := l-1

```

```

        end do;
        6  A[1,1] := Ext(i,j,k);
        7  A[2,1] := j;
        8  A
end proc

excolred := proc(i::integer, k::integer)
local z, A, l, x, j, L, K;
  1  z := BG(k);
  2  L := ['$(1 .. 2)];
  3  K := [1];
  4  A := Matrix(2,k+1);
  5  for l from 2 to k+1 do
  6    A[1,1] := ext(i,l-1,k);
  7    A[2,1] := l-1;
  8    if A[1,1] <> 0 then
  9      K := [op(K), l]
    end if
  end do;
  10 A[1,1] := Ext(i,j,k);
  11 A[2,1] := j;
  12 A := LinearAlgebra[SubMatrix](A,L,K);
  13 A
end proc

exrow := proc(j::integer, k::integer)
local z, A, l, x, i;
  1  z := BG(k);
  2  A := Matrix(2,k+1);
  3  for l from 2 to k+1 do
  4    A[1,1] := ext(l-2,j,k);
  5    A[2,1] := l-2
  end do;
  6  A[1,1] := Ext(i,j,k);
  7  A[2,1] := i;
  8  A
end proc

exrowred := proc(j::integer, k::integer)
local z, A, l, x, i, L, K;
  1  z := BG(k);
  2  L := ['$(1 .. 2)];
  3  K := [1];
  4  A := Matrix(2,k+1);
  5  for l from 2 to k+1 do
  6    A[1,1] := ext(l-2,j,k);
  7    A[2,1] := l-2;
  8    if A[1,1] <> 0 then
  9      K := [op(K), l]
    end if
  end do;
  10 A[1,1] := Ext(i,j,k);
  11 A[2,1] := i;
  12 A := LinearAlgebra[SubMatrix](A,L,K);
  13 A
end proc

ext := proc(i::integer, j::integer, k::integer)
local z, A, l, x;
  1  z := BG(k);
  2  A := Array(1 .. 1,1 .. k);
  3  for l to k do
  4    A[1,1] := count1(l,z)
  end do;
  5  x := A[1,j];
  6  x := x[1,i+1];
  7  x
end proc

exta := proc(i::integer, j::integer, z::Array)
local k, A, l, x;
  1  k := ArrayTools[Size](z,1);
  2  A := Array(1 .. 1,1 .. k);
  3  for l to k do
  4    A[1,1] := count1(l,z)
  end do;
  5  x := A[1,j];
  6  x := x[1,i+1];
  7  x
end proc

```

```

extractmats := proc(a::Matrix)
local m, n, l, k, i, j, A;
1  m := op([1, 1],a);
2  n := op([1, 2],a);
3  l := 0;
4  for j to m-1 do
5      if 'mod'(a[j,1],2) = 0 then
6          l := l+1
7          end if
8      end do;
9  A := Matrix(l+1,n);
10 for i from 2 to n do
11     k := 1;
12     A[l+1,i] := a[m,i];
13     for j to m-1 do
14         if 'mod'(a[j,1],2) = 0 then
15             A[k,i] := extracts(1/2*a[j,1],a[j,i]);
16             A[k,1] := 1/2*a[j,1];
17             k := k+1
18         end if
19     end do
20 end do;
21 A
end proc

extracts := proc(n::posint, a::{SqI, '+'(SqI)})
local b;
1  b := adem(a);
2  if type(b,'+') then
3      RETURN('mod'(map2(procname,n,b),2))
4  elif op(1,b) = n then
5      if a = s(n) then
6          RETURN(1)
7      else
8          RETURN(s(op(2 .. nops(b),b)))
9      end if
10 else
11     RETURN(0)
12 end if
end proc

firstcoltomat := proc(a::Matrix)
local c, i, j, k, m, l;
1  m := op([1, 1],a);
2  j := 0;
3  for i to m-1 do
4      if 'mod'(a[i,1],2) = 0 then
5          j := j+1
6      end if
7  end do;
8  c := Matrix(m-1,j);
9  k := 1;
10 for i to m-1 do
11     if 'mod'(a[i,1],2) = 0 then
12         c[i,k] := s(1/2*a[i,1]);
13         k := k+1
14     end if
15 end do;
16 c
end proc

generate := proc(a::{SqI, '+'(SqI)})
local i, A, B, C, S;
1  if type(a,SqI) then
2      if type(a,s(integer)) then
3          RETURN(1)
4      else
5          RETURN(0)
6      end if
7  elif type(a,'+') then
8      RETURN(map(procname,a))
9  end if
end proc

graphiquearray := proc(a::Array)
local i, s, t;
1  s := ArrayTools[Size](a,1);
2  t := graphiquematrix(1,a[1,1]);
3  for i from 2 to s do
4      t := graphiquematrix(i,a[i,1]), t
5  end do;

```

```

5   plots[multiple](plot,t)
end proc

graphiquematrix := proc(n::integer, m::Matrix)
local h, k, i, j, M, N, t, r;
1   h := ArrayTools[Size](m,1);
2   k := ArrayTools[Size](m,2);
3   M := Matrix(h-1,2);
4   N := Matrix(k-1,2);
5   for i to h-1 do
6       M[i,1] := n;
7       M[i,2] := (m(i,1)*10^(1+floor(log[10](i))+i)/(10^(1+floor(log[10](i)))))
8   end do;
9   for j to k-1 do
10      N[j,1] := n+1;
11      N[j,2] := (m(h,j+1)*10^(1+floor(log[10](j))+j)/(10^(1+floor(log[10](j)))))
12  end do;
13  t := ['<|>','<,>','(0,0)','<,>','(0,0)'];
14  for i to h-1 do
15      for j from 2 to k do
16          if m[i,j] > 0 then
17              t := ['<|>','<,>','(n,n+1)','<,>','(M[i,2],N[j-1,2])'], t
18          end if
19      end do
20  end do;
21  r := [M, style = point], [N, style = point], t
end proc

graphiqueres := proc(n::integer)
1   RETURN(graphiquearray(BG(n)))
end proc

latexext := proc(k::integer)
local fp, i, j, n;
1   fp := fopen(cat("extension", sprintf("%a,k"), ".txt"), WRITE);
2   for n from 3 to k do
3       fprintf(fp, '\n');
4       fprintf(fp, '\begin{table}\n');
5       fprintf(fp, '\begin{tabular}{*{%a}{|c|}}\n', n+1);
6       fprintf(fp, '\hline\n');
7       fprintf(fp, '\backslashbox{j}{i}');
8       for i to n do
9           fprintf(fp, '& %a', i-1)
10      end do;
11      fprintf(fp, '\\\\n\\hline');
12      for i from 2 to n+1 do
13          fprintf(fp, %a, n-i+2);
14          for j to n do
15              if ext(j-1, n-i+2, n) = 1 then
16                  fprintf(fp, '& \cellcolor{blue!25}%a', ext(j-1, n-i+2, n))
17              elif 1 < ext(j-1, n-i+2, n) then
18                  fprintf(fp, '& \cellcolor{red!50}%a', ext(j-1, n-i+2, n))
19              elif ext(j-1, n-i+2, n) = 0 then
20                  fprintf(fp, '& ')
21              end if
22          end do;
23          fprintf(fp, '\\\\n\\hline')
24      end do;
25      fprintf(fp, '\end{tabular}\n');
26      fprintf(fp, '\caption{$\mathrm{Ext}_{\mathcal{U}}^{\{i\}}\left(\Sigma^j_{\mathbb{F}_2}, \Sigma^{\{a\}}_{\mathbb{F}_2}\right)$', n);
27      fprintf(fp, '\end{table}\n');
28  end do;
29  fclose(fp)
end proc

latexextmat := proc(n::integer)
local fp, i, j;
1   fp := fopen(cat("ext", sprintf("%a,n"), ".txt"), WRITE);
2   fprintf(fp, '\begin{table}\n');
3   fprintf(fp, '\begin{tabular}{*{%a}{|c|}}\n', n+1);
4   fprintf(fp, '\hline\n');
5   fprintf(fp, '\backslashbox{j}{i}');
6   for i to n do
7       fprintf(fp, '& %a', i-1)
8   end do;
9   fprintf(fp, '\\\\n\\hline');
10  for i from 2 to n+1 do
11      fprintf(fp, %a, n-i+2);
12  end do;
13  for j to n do

```



```

12     if ext(j-1,n-i+2,n) = 1 then
13         fprintf(fp, '& \\cellcolor{blue!25}%a', ext(j-1,n-i+2,n))
14     elif 1 < ext(j-1,n-i+2,n) then
15         fprintf(fp, '& \\cellcolor{red!50}%a', ext(j-1,n-i+2,n))
16     elif ext(j-1,n-i+2,n) = 0 then
17         fprintf(fp, '& ')
18     end if
19 end do;
20 fprintf(fp, '\\\\n\\hline ');
21 end do;
22 fprintf(fp, '\\end{tabular}\\n');
23 fprintf(fp, '\\caption{\\mathrm{Ext}_{\\mathcal{U}}^i\\left(\\Sigma^j_{\\mathbb{F}_2, \\Sigma^a}\\mathbb{F}_{_2}\\right)}', n);
24 fprintf(fp, '\\end{table}\\n');
25 fclose(fp)
end proc

matgraph := proc(n::integer, m::Matrix)
local h, k, i, j, M, N, t, r;
1   h := ArrayTools[Size](m,1);
2   k := ArrayTools[Size](m,2);
3   M := Matrix(h-1,2);
4   N := Matrix(k-1,2);
5   for i to h-1 do
6       M[i,1] := n;
7       M[i,2] := (m(i,1)*10^(1+floor(log[10](i))+i))/(10^(1+floor(log[10](i))))
8   end do;
9   for j to k-1 do
10      N[j,1] := n+1;
11      N[j,2] := (m(h,j+1)*10^(1+floor(log[10](j))+j))/(10^(1+floor(log[10](j))))
12  end do;
13  t := ['<|>', '<', '>', '(0,0)', '<', '>', '(0,0)'];
14  for i to h-1 do
15      for j from 2 to k do
16          if m[i,j] <> 0 then
17              if generate(m[i,j]) = 1 then
18                  t := ['<|>', '<', '>', (n,n+1), '<', '>', (M[i,2], N[j-1,2])], t
19              end if
20          end if
21      end do
22  end do;
23  r := [M, style = point], [N, style = point], t
end proc

matgraphique := proc(n::integer, m::Matrix)
local h, k, i, j, M, N, t, r;
1   h := ArrayTools[Size](m,1);
2   k := ArrayTools[Size](m,2);
3   M := Matrix(h-1,2);
4   N := Matrix(k-1,2);
5   for i to h-1 do
6       M[i,1] := n;
7       M[i,2] := (m(i,1)*10^(1+floor(log[10](i))+i))/(10^(1+floor(log[10](i))))
8   end do;
9   for j to k-1 do
10      N[j,1] := n+1;
11      N[j,2] := (m(h,j+1)*10^(1+floor(log[10](j))+j))/(10^(1+floor(log[10](j))))
12  end do;
13  t := ['<|>', '<', '>', '(0,0)', '<', '>', '(0,0)'];
14  for i to h-1 do
15      for j from 2 to k do
16          if m[i,j] <> 0 then
17              if type(m[i,j], s(integer)) then
18                  t := ['<|>', '<', '>', (n,n+1), '<', '>', (M[i,2], N[j-1,2])], t
19              else
20                  t := ['<|>', '<', '>', (n,n+1), '<', '>', (M[i,2], N[j-1,2]), linestyle=[dot, longdash]], t
21              end if
22          end if
23      end do
24  end do;
25  r := [M, style = point], [N, style = point], t
end proc

multinom := proc()
local f, L, S;
1   L := [args];
2   if not type(L, list(integer)) then
3       ERROR('Invalid arguments')
4   end if;
5   if not type(L, list(nonnegint)) then

```

```

5     RETURN(0)
end if;
6 f := n -> 1/2*n-1/2*'mod'(n,2);
7 S := convert(L,set);
8 if nops(S) = 1 and op(1,S) = 0 then
9     RETURN(1)
10    elif 1 < convert('mod'(L,2),'+') then
11        RETURN(0)
12    else
13        multinom(op(map(f,L)))
14    end if
end proc

pera := proc(A::Array)
local B, s, i, t;
1 s := ArrayTools[Size](A,1);
2 B := Array(1 .. s+1,1 .. 1);
3 for i to s do
4     B[i,1] := LinearAlgebra[Transpose](LinearAlgebra[Column](A[i,1],1));
5     B[i,1] := sort(B[i,1])
6 end do;
7 t := op([1, 1],A[s,1]);
8 B[s+1,1] := LinearAlgebra[Row](A[s,1],t);
9 B[s+1,1] := sort(B[s+1,1]);
10 B
end proc

peri := proc(n::posint)
local A, B, s, i, t;
1 A := BG(n);
2 s := ArrayTools[Size](A,1);
3 B := Array(1 .. s+1,1 .. 1);
4 for i to s do
5     B[i,1] := LinearAlgebra[Transpose](LinearAlgebra[Column](A[i,1],1));
6     B[i,1] := sort(B[i,1])
7 end do;
8 t := op([1, 1],A[s,1]);
9 B[s+1,1] := LinearAlgebra[Row](A[s,1],t);
10 B[s+1,1] := sort(B[s+1,1]);
11 B
end proc

remiseazero := proc(a::integer)
1 if 'mod'(a,2) <> 0 then
memory used=3.8MB, alloc=8.3MB, time=0.10
2     RETURN(0)
3 else
4     RETURN(1/2*a)
5 end if
end proc

repararray := proc(a::Array)
local s, S, i;
1 s := ArrayTools[Size](a,1);
2 S := Array(1 .. s,1 .. 1);
3 for i to s do
4     S[i,1] := repmat(a[i,1])
5 end do;
6 S
end proc

replace := proc(i::integer, j::integer, a::Matrix)
local m, n, A, k, l;
1 if op([1, 1],a) < i or op([1, 2],a) < j then
2     error "incompatible dimensions"
3 end if;
4 m := op([1, 1],a);
5 n := op([1, 2],a);
6 A := a;
7 for k to m-1 do
8     for l from 2 to n do
9         if k <> i and l <> j then
10            if A[i,l] = 1 then
11                A[k,l] := 'mod'(test(A[m,l], 'mod'(A[k,l]+A[k,j],2)),2)
12            elif A[k,j] = 1 then
13                A[k,l] := 'mod'(test(A[m,l], 'mod'(A[k,l]+A[i,l],2)),2)
14            else
15                A[k,l] := 'mod'(test(A[m,l], 'mod'(A[k,l]+adem(s(A[k,j],A[i,l])),2)),2)
16            end if
17        end if
18    end do
19 end do

```

```

        end do;
13    for k to m-1 do
14        A[k,j] := 0
        end do;
15    for l from 2 to n do
16        A[i,l] := 0
        end do;
17    A
end proc

replacearray := proc(a::Array)
local s, S, i;
1    s := ArrayTools[Size](a,1);
2    S := Array(1 .. s,1 .. 1);
3    for i to s do
4        S[i,1] := replacematrix(a[i,1])
        end do;
5    S
end proc

replacematrix := proc(m::Matrix)
local n, k, M, i, j;
1    n := ArrayTools[Size](m,1);
2    k := ArrayTools[Size](m,2);
3    M := Matrix(n,k);
4    for i to n-1 do
5        M[i,1] := m[i,1]
        end do;
6    for i from 2 to k do
7        M[n,i] := m[n,i]
        end do;
8    for i to n-1 do
9        for j from 2 to k do
10           if m[i,j] <> 0 then
11               M[i,j] := "x"
            end if
        end do
    end do;
12    M
end proc

repmat := proc(m::Matrix)
local n, k, M, i, j;
1    n := ArrayTools[Size](m,1);
2    k := ArrayTools[Size](m,2);
3    M := Matrix(n,k);
4    for i to n-1 do
5        M[i,1] := m[i,1]
        end do;
6    for i from 2 to k do
7        M[n,i] := m[n,i]
        end do;
8    for i to n-1 do
9        for j from 2 to k do
10           if m[i,j] <> 0 then
11               if generate(m[i,j]) = 1 then
12                   M[i,j] := x
                else
13                   M[i,j] := t
                end if
            end if
        end do
    end do;
14    M
end proc

resgraph := proc(n::integer)
1    RETURN(arraygraph(BG(n)))
end proc

resgraphique := proc(n::integer)
1    RETURN(arraygraphique(BG(n)))
end proc

rowtoleftmat := proc(a::Matrix)
local c, i, j, k, m, l, t;
1    t := op([1, 1],a);
2    m := op([1, 2],a);
3    j := 0;
4    for i from 2 to m do
5        if 'mod'(a[t,i],2) = 0 then
6            j := j+1

```

```

        end if
    end do;
7   c := Matrix(m-1,j+1);
8   k := 2;
9   for i from 2 to m do
10      c[i-1,1] := a[t,i];
11      if 'mod'(a[t,i],2) = 0 then
12          c[i-1,k] := s(1/2*a[t,i]);
13          k := k+1
        end if
    end do;
14   c
end proc

test := proc(m::posint, a::{SqI, '+'(SqI)})
local b;
1   b := adem(a);
2   if type(b,'+') then
3       RETURN('mod'(map2(procname,m,b),2))
    elif type(b,adbasis) then
4       if m < exc(b) then
5           RETURN(0)
        else
6           RETURN(b)
        end if
    end if
end proc

end module:

#Save to Personal Lib:

savelib('BrownGitler');

```

Bibliographie

- [BG73] Edgar H. Brown, Jr. and Samuel Gitler. A spectrum whose cohomology is a certain cyclic module over the Steenrod algebra. *Topology*, 12 :283–295, 1973.
- [CE99] Henri Cartan and Samuel Eilenberg. *Homological algebra*. Princeton Landmarks in Mathematics. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1999. With an appendix by David A. Buchsbaum, Reprint of the 1956 original.
- [FFSS99] Vincent Franjou, Eric M. Friedlander, Alexander Scorichenko, and Andrei Suslin. General linear and functor cohomology over finite fields. *Ann. of Math. (2)*, 150(2) :663–728, 1999.
- [FLS94] Vincent Franjou, Jean Lannes, and Lionel Schwartz. Autour de la cohomologie de Mac Lane des corps finis. *Invent. Math.*, 115(3) :513–538, 1994.
- [FS90] V. Franjou and L. Schwartz. Reduced unstable \mathcal{A} -modules and the modular representation theory of the symmetric groups. *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)*, 23(4) :593–624, 1990.
- [FS97] Eric M. Friedlander and Andrei Suslin. Cohomology of finite group schemes over a field. *Invent. Math.*, 127(2) :209–270, 1997.
- [Gab62] Pierre Gabriel. Des catégories abéliennes. *Bull. Soc. Math. France*, 90 :323–448, 1962.
- [Hai10] Nguyen Dang Ho Hai. Foncteurs polynomiaux stricts et modules instables sur l’algèbre de Steenrod. *J. Algebra*, 324(4) :860–874, 2010.
- [HK88] John C. Harris and Nicholas J. Kuhn. Stable decompositions of classifying spaces of finite abelian p -groups. *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.*, 103(3) :427–449, 1988.
- [HLS93] Hans-Werner Henn, Jean Lannes, and Lionel Schwartz. The categories of unstable modules and unstable algebras over the Steenrod algebra modulo nilpotent objects. *Amer. J. Math.*, 115(5) :1053–1106, 1993.
- [HLS95] Hans-Werner Henn, Jean Lannes, and Lionel Schwartz. Localizations of unstable \mathcal{A} -modules and equivariant mod p cohomology. *Math. Ann.*, 301(1) :23–68, 1995.
- [Jam80] Gordon D. James. The decomposition of tensors over fields of prime characteristic. *Math. Z.*, 172(2) :161–178, 1980.
- [JK81] Gordon James and Adalbert Kerber. *The representation theory of the symmetric group*, volume 16 of *Encyclopedia of Mathematics and its Applications*. Addison-Wesley Publishing Co., Reading, Mass., 1981. With a foreword by P. M. Cohn, With an introduction by Gilbert de B. Robinson.

-
- [Kuh13] N. J. Kuhn. The Krull filtration of the category of unstable modules over the Steenrod algebra. *ArXiv e-prints*, June 2013.
 - [Lan87] J. Lannes. Sur la cohomologie modulo p des p -groupes abéliens élémentaires. In *Homotopy theory (Durham, 1985)*, volume 117 of *London Math. Soc. Lecture Note Ser.*, pages 97–116. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1987.
 - [Lin92] Wên Hsiung Lin. Unstable ext groups over the Steenrod algebra by injective resolutions. *Math. Z.*, 210(2) :255–265, 1992.
 - [LS89] Jean Lannes and Lionel Schwartz. Sur la structure des A -modules instables injectifs. *Topology*, 28(2) :153–169, 1989.
 - [LZ86] Jean Lannes and Saïd Zarati. Sur les \mathcal{U} -injectifs. *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)*, 19(2) :303–333, 1986.
 - [LZ87] Jean Lannes and Saïd Zarati. Sur les foncteurs dérivés de la déstabilisation. *Math. Z.*, 194(1) :25–59, 1987.
 - [Mil58] John Milnor. The Steenrod algebra and its dual. *Ann. of Math. (2)*, 67 :150–171, 1958.
 - [ML98] Saunders Mac Lane. *Categories for the working mathematician*, volume 5 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, second edition, 1998.
 - [MP67] W. S. Massey and F. P. Peterson. *The **Remarque**.mod 2 cohomology structure of certain fibre spaces*. Memoirs of the American Mathematical Society, No. 74. American Mathematical Society, Providence, R.I., 1967.
 - [NS14] T. C. Nguyen and L. Schwartz. Some finiteness results in the category \mathcal{U} . *ArXiv e-prints*, January 2014.
 - [Sch88] Lionel Schwartz. La filtration nilpotente de la catégorie \mathcal{U} et la cohomologie des espaces de lacets. In *Algebraic topology—rational homotopy (Louvain-la-Neuve, 1986)*, volume 1318 of *Lecture Notes in Math.*, pages 208–218. Springer, Berlin, 1988.
 - [Sch94] Lionel Schwartz. *Unstable modules over the Steenrod algebra and Sullivan’s fixed point set conjecture*. Chicago Lectures in Mathematics. University of Chicago Press, Chicago, IL, 1994.
 - [Sin78] William M. Singer. Iterated loop functors and the homology of the Steenrod algebra. *J. Pure Appl. Algebra*, 11(1–3) :83–101, 1977/78.
 - [Spa66] Edwin H. Spanier. *Algebraic topology*. McGraw-Hill Book Co., New York-Toronto, Ont.-London, 1966.
 - [Ste62] N. E. Steenrod. *Cohomology operations*. Lectures by N. E. Steenrod written and revised by D. B. A. Epstein. Annals of Mathematics Studies, No. 50. Princeton University Press, Princeton, N.J., 1962.
 - [Tou13] A. Touzé. A functorial control of integral torsion in homology. *ArXiv e-prints*, October 2013.

Index

A	
action de restriction	19
Adem	73
Adem-2	18
Adem-p	18
algèbre	
de Dickson	138
de Steenrod	18
instable	20
algorithme BG	73
application polynomiale	54
C	
catégorie	
de foncteurs	36
des foncteurs polynomiaux stricts	56
des modules	19
localement noethérienne	27, 41
quotient	37
E	
excès	20
Ext-paramétré	121
F	
filtration	
de Krull	41
nilpotente	47
foncteur	
d'inclusion	36
de Hai	53
de Lannes	34
oubli	20
polynomial	54
polynomial strict	55
formule de Cartan	19
Frob- \mathcal{U}	110
Frob-general- \mathcal{U}	110
Frobenius-u	23
I	
instabilité	19
L	
longueur d'une partition	31
M	
mod-nil générateur	62
module	
Sq^1 -acyclique	35
Nil -fermé	40
Nil -réduit	voir module réduit
l -nilpotent	46
t -connexe	21
de Brown-Gitler	28
instable	19
localement fini	42
mod-nil monogène	62
nilpotent	39
réduit	23
monôme admissible	20
morphisme à la Frobenius	110
O	
objet	
de type fini	27
noethérien	27

P

partition

2-régulière.....31

2-régulière pour les colonnes.....32

conjuguée.....32

d'un entier.....31

Poly.....54

pseudo-hyper résolution.....52

R

relations d'Adem.....18

S

sous-catégorie

épaisse.....37

localisante.....39

suite

à la Bockstein.....25

admissible.....20

exacte de Mahowald.....30

Index des notations

Algèbres et corps

\mathbb{F}_p	17	\mathcal{A}_p	18
H^*X	17	\mathcal{A}	30
\tilde{H}^*X	17		

Catégories et objets

$\mathcal{T}op$	17	\mathcal{F}_ω	37
$\mathcal{V}_{\mathbb{F}_p}$	17	Nil	39
$K(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}, n)$	17	\mathcal{A}_n	41
\mathcal{M}	19	\mathcal{A}_ω	41
\mathcal{U}	19	\mathcal{U}_ω	42
\mathcal{K}	20	\mathcal{U}'_n	43
\mathcal{U}'	22	Nil_l	47
\mathcal{L}	32	$\mathcal{V}_{\mathbb{F}_p}^f$	53
\mathcal{L}_d	32	\mathcal{V}	53
\mathcal{P}_d	32	\mathcal{V}^f	53
\mathcal{S}_d	32	\mathcal{V}^{gr}	53
BV	34	$\Gamma^d \mathcal{V}^f$	56
\mathcal{M}_R^f	36	\mathcal{P}_d	56
$\mathcal{F}(R)$	36	\mathcal{P}	56
\mathcal{F}	36		

Foncteurs et transformations

H^n	17	Σ^t	20
$H^n(-; \mathbb{F}_p)$	18	\mathcal{D}	21
\tilde{H}^n	18	Φ	23
\mathcal{O}	20	Ω	24

Ω_1	24	S^n	54
Ω_s^n	24	S^*	54
$\tilde{\Phi}$	25	Λ^n	54
$\tilde{\Sigma}$	25	Λ^*	54
$(- : D)_{\mathcal{U}}$	34	$P_{V,W}$	54
T_V	34	$F^{(r)}$	57
\bar{T}_V	34	$\Gamma^{d,W}$	57
T	34	$S^{d,W}$	58
\bar{T}	34	Γ^λ	58
f	36	$\bar{\Gamma}^{d;e}$	58
f'	37	l	58
m	37	r	58
m'	37	S^λ	61
\bar{m}	53	Λ^λ	61
\bar{m}_d	53	ℓ	118
\otimes^n	54	ℓ^*	118
\otimes^*	54	$F^V(W)$	121
Γ^n	54	$G_V(W)$	121
Γ^*	54	$\underline{\text{Ext}}_{\mathcal{F}}^i(F, G)$	121

Modules et éléments

$ x $	19	$R_n(M)$	47
$\Sigma^t x$	21	M^G	53
$F(n)$	21	M_G	53
\imath_n	21	V^\sharp	54
$F'(2n)$	22	$F(\lambda)$	61
\imath'_{2n}	22	ω_α	61
Φx	23	${}^{2^n}\sqrt{z}$	62
$P(M, N)$	25	\mathcal{B}_i	87
$\text{IP}(M, N)$	25	$\text{Ex}_{r,s}^i(M)$	110
$J(n)$	28	H_r	110
i_M	28	\mathcal{Q}_k^n	114
$J\left(\frac{n}{2}\right)$	29	I^\bullet	117
x_i	30	N^\bullet	117
I_λ	32	R^\bullet	117
P_λ	32	e_n	119
L_λ	32	$J(n_1, \dots, n_k)^t$	130
S_λ	33	$e(n, k)$	132
$I_{(\lambda)}$	33		

Morphismes et différentielles

λ_M	23	∂^\bullet	117
$\bullet\varphi$	28	∂_n^l	117
σ_n	30	ω^l	117
$\mathrm{Hom}_{Pol}(V, W)$	55	∂_r^l	117
ω_n	71	ψ_{2k+1}	125
s_n	71	ψ_{2k}	125
β_i	87		

Opérateurs et opérations

Sq^i	18	P_k	46
P^i	18	$\omega_M(i)$	47
β	18	$ \lambda $	58
Sq^0	19	$m_n(r)$	66
P^0	19	ξ_r^n	66
$e(I)$	20	$m_{(l,i)}$	73
Sq^I	20	$s(I)$	80
P^I	20	$\mathrm{BG}(n)$	80
Sq_0	22	$\mathrm{BG}(\mathcal{C})$	81
P_0	22	$\mathrm{BGA}(\mathcal{C})$	81
$d(M)$	28	$l(\mathcal{C})$	81
Aug_n	29	τ	92
Div_n	29	$m(J)$	92
Div	29	Q_i	113
$l(\lambda)$	31	$\Sigma_p(s)$	121
$ \lambda $	31	$\mathcal{I}(p, s)$	121
$\alpha(d)$	33	$v(d)$	131
Sq_k	46		

Algèbre homologique dans la catégorie des modules instables

Cette thèse présente l'étude des résolutions injectives de certains objets de la catégorie \mathcal{U} des modules instables, nécessaire pour faire l'algèbre homologique dans cette catégorie. Plus précisément, on donne des descriptions sur la résolution injective minimale du module $F(1)$ ainsi que celles des cohomologies des sphères $\Sigma^n \mathbb{F}_2$.

Nous introduisons à cet effet de la pseudo-hyper résolution. Elle permet de construire une résolution explicite d'un module instable à partir d'une suite acyclique dont la première homologie est ce module. Cette construction ressemble à celle de l'hyper résolution mais n'est pas identique. Dans notre situation, on joue directement sur les termes de la suite acyclique, considère la résolution de chaque terme et les rassemble pour avoir un faux complexe double. En s'appuyant sur l'injectivité des modules de ce complexe double, on y ajoute suffisamment de différentielles pour faire de la suite totale un complexe qui est en fait une résolution du module considéré. Pour traiter les cohomologies des sphères, on reformule la pseudo-hyper résolution sous forme d'un algorithme élémentaire appelé BG. Cet algorithme, joint à la suite à la Bockstein injective, permet d'avoir une description explicite sur une grande partie de la résolution injective minimale de $\Sigma^n \mathbb{F}_2$.

Une seule modeste partie de la partie nilpotente de la résolution injective minimale de $F(1)$ est découverte. En utilisant les études sur les dérivés $\ell^*(F(1))$ et les groupes $\text{Ext}_{\mathcal{F}}^*(I, I)$, on montre que la partie nilpotente de la résolution est périodique et calcule explicitement quelques termes de cette partie. Ce sont les ingrédients cruciaux pour montrer que le morphisme naturel $\text{Ext}_{\mathcal{U}}^r(\Phi^n F(1), \Phi^n F(1)) \rightarrow \text{Ext}_{\mathcal{U}}^r(\Phi^{n+1} F(1), \Phi^{n+1} F(1))$ est injectif dans plusieurs cas intéressants.

On décore cette thèse avec une nouvelle preuve élémentaire sur la caractérisation de la filtration de Krull de la catégorie \mathcal{U} ainsi qu'un plongement pleinement fidèle de la catégorie \mathcal{P}_d de foncteurs polynomiaux stricts dans la catégorie \mathcal{U} .

Mots clés : Morphisme à la Bockstein, groupe extension, torsion de Frobenius, foncteur de Hai, filtration de Krull, filtration nilpotente, pseudo-hyper résolutions, algèbre de Steenrod, foncteurs polynomiaux stricts, modules instables.

Some homological algebra computations in the category of unstable modules

The aim of this work is to study injective resolutions of certain objects in the category \mathcal{U} of unstable modules. More precisely, we concentrate on the minimal injective resolution of the module $F(1)$ as well as ones of the cohomology of spheres $\Sigma^n \mathbb{F}_2$.

For that purpose, the pseudo-hyper resolution is introduced, allowing to construct an explicit resolution of an unstable module from an acyclic sequence admitting this module as its first homology. This construction and the hyper resolution do look alike but are not identical. In our situation, we consider the sequence without splitting it into short exact sequences to avoid unnecessary concerns about the differentials. Placing the resolutions of each term in the sequence together, we obtain a fake double complex. Fortunately, the injectivity of modules in this double complex allow us to insert enough differentials that make the total sequence a complex. This complex is indeed the resolution for the considered module. To deal with the particular cases of $\Sigma^n \mathbb{F}_2$, the pseudo-hyper resolution will be translated into the algorithm BG. Together with this procedure, the Bockstein sequence gives a simple description on a large part of the minimal injective resolution of $\Sigma^n \mathbb{F}_2$.

The minimal injective resolution of $F(1)$ is too much to deal with. Few results on this matter have been known. Luckily the nilpotent part of this resolution is quite accessible. Using the computations on the derived functors $\ell^*(F(1))$ and the groupes $\text{Ext}_{\mathcal{F}}^*(I, I)$ we first show that this part is periodic and then give a simple description for several terms. These are crucial to show that the natural map $\text{Ext}_{\mathcal{U}}^r(\Phi^n F(1), \Phi^n F(1)) \rightarrow \text{Ext}_{\mathcal{U}}^r(\Phi^{n+1} F(1), \Phi^{n+1} F(1))$ is injective in many cases.

The work is also decorated with a new elementary proof on the characterization of the Krull filtration and a fully faithful embedding from the category \mathcal{P}_d to the category \mathcal{U} .

Keywords : Bockstein morphism, extension group, Frobenius twist, Hai's functor, Krull filtration, nilpotent filtration, pseudo-hyper resolutions, Steenrod algebra, strict polynomial functors, unstable modules.